

راهنمای گام به گام

دروس عمومی

پایه یازدهم

فنی و حرفه ای

- (۱) ریاضی (۲)
- (۲) فارسی و نگارش (۲)
- (۳) دین و زندگی (۲)
- (۴) انسان و محیط زیست
- (۵) تاریخ معاصر ایران
- (۶) زبان انگلیسی (۲)
- (۷) عربی ، زبان قرآن
- (۸) شیمی

عنوان و نام پدیدآور: راهنمای گام به گام دروس عمومی پایه یازدهم فنی حرفه ای (۱) ریاضی (۲) فارسی و نگارش (۲) ...

مشخصات نشر: تهران، چهارخونه،

مشخصات ظاهری: ۲۹۰ ص.: مصور، جدول، نمودار؛ ۲۲*۲۹ س م.

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۰۵-۱۴۷-۸

وضعیت فهرست نویسی: فپای مختصر

شناسه افزوده: انتشارات چهارخونه

شماره کتابشناسی ملی: ۴۸۹۵۶۹۸

راهنمای گام به گام پایه یازدهم دروس عمومی

ناشر: انتشارات چهارخونه

پدیدآورندگان: گروه طراحان

ویراستار: نجمه موسوی

طراحی و گرافیک جلد: مژده صالح پور

صفحه آرایی: محبوبه شریفی

حروفچینی: فاطمه مرادی

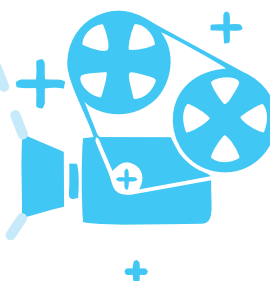
لیتوگرافی: امیر گرافیک

چاپ و صحافی: یگانه

نوبت چاپ: هشتم - تابستان ۱۴۰۲

شمارگان: ۵۰۰ جلد

قیمت: ۲۵۰۰۰۰ تومان



ISBN: 978-600-305-147 - 8

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۰۵-۱۴۷-۸

پایگاه و فروشگاه اینترنتی: WWW.4khooneh.org

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است و هر گونه نسخه برداری پیگرد قانونی دارد.

تلفن های مرکز پخش: ۰۹۱۲ ۶۲ ۰۰۰۲۶ - ۶۶ ۹۲ ۷۷ ۹۶ - ۶۶ ۹۲ ۸۱ ۷۱

جهت دریافت کتاب از طریق پست به سایت www.4Khooneh.org مراجعه

نموده و یا با شماره تلفن ۰۲۹ ۶۶۹۲۸۰ (۰۲۱) تماس حاصل فرمایید.

فهرست مطالب

بخش اول: ریاضی ۲

پودمان اول: تابع	۵.....
پودمان دوم: تابع‌های خطی و درجه دوم	۲۴.....
پودمان سوم: زاویه‌های دلخواه و نسبت مثلثاتی	۴۹.....
پودمان چهارم: لگاریتم و خواص آن	۷۲.....
پودمان پنجم: آمار توصیفی	۸۳.....

بخش دوم: فارسی و نگارش (۲)

ستایش	۱۰۵.....
درس اول: نیکي	۱۰۵.....
درس دوم: اجزای نوشته	۱۰۸.....
درس سوم: آغازگری تنها	۱۱۱.....
درس چهارم: گسترش محتوا (۱)	۱۱۳.....
درس پنجم: پرورده عشق	۱۱۶.....
درس ششم: گسترش محتوا (۲)	۱۱۹.....
درس هفتم: ذوق لطیف	۱۲۱.....
درس هشتم: گسترش محتوا (۳)	۱۲۳.....
درس نهم: یاران عشق	۱۲۴.....
درس دهم: سفرنامه	۱۲۷.....
درس یازدهم: کاوه دادخواه	۱۲۹.....
درس دوازدهم: کاهش محتوا	۱۳۳.....
درس سیزدهم: کبوتر طوق دار	۱۳۵.....
درس چهاردهم: خوان عدل	۱۳۷.....
نیایش	۱۳۹.....

بخش سوم: دین و زندگی ۲

بخش اول: تفکر و اندیشه	۱۴۱.....
درس اول: هدایت الهی	۱۴۱.....
درس دوم: تداوم هدایت	۱۴۲.....
درس سوم: معجزه جاویدان	۱۴۴.....
درس چهارم: مسئولیت‌های پیامبر	۱۴۵.....
درس پنجم: امامت، تداوم رسالت	۱۴۷.....
درس ششم: پیشوایان اسوه	۱۵۰.....
درس هفتم: وضعیت فرهنگی	۱۵۱.....
درس هشتم: احیای ارزش‌های راستین	۱۵۲.....
درس نهم: عصر غیبت	۱۵۴.....
درس دهم: مرجعیت و ولایت فقیه	۱۵۶.....
بخش دوم: در مسیر	۱۵۹.....
درس یازدهم: عزت نفس	۱۵۹.....
درس دوازدهم: پیوند مقدس	۱۶۰.....

بخش چهارم: انسان و محیط زیست

درس اول: آب، سرچشمه زندگی	۱۶۳.....
درس دوم: خاک، بستر زندگی	۱۶۶.....
درس سوم: هوا، نفس زندگی	۱۶۸.....
درس چهارم: انرژی، حرکت، زندگی	۱۷۰.....
درس پنجم: زباله، فاجعه محیط زیست	۱۷۴.....
درس ششم: تنوع زیستی	۱۷۶.....
درس هفتم: محیط زیست	۱۷۸.....

بخش پنجم: تاریخ معاصر ایران

درس اول: حکومت قاجار	۱۸۱.....
درس دوم: دوران ناصرالدین شاه	۱۸۱.....
درس سوم: زمینه‌های نهضت مشروطه	۱۸۲.....
درس چهارم: آغاز حرکت مردم	۱۸۳.....
درس پنجم: مشروطه در دوره محمدعلی شاه	۱۸۳.....
درس ششم: دوره دوم مشروطه	۱۸۴.....
درس هفتم: کودتای ۱۲۹۹	۱۸۵.....
درس هشتم: رضاخان، تثبیت قدرت	۱۸۵.....
درس نهم: ویژگی‌های حکومت رضاشاه	۱۸۶.....
درس دهم: سقوط رضاشاه	۱۸۶.....
درس یازدهم: اشغال ایران	۱۸۷.....
درس دوازدهم: نهضت ملی شدن	۱۸۷.....
درس سیزدهم: زمینه‌های کودتا	۱۸۸.....
درس چهاردهم: کودتای ۲۸ مرداد	۱۸۸.....
درس پانزدهم: ربع قرن سیطره آمریکا	۱۸۸.....
درس شانزدهم: زمینه‌های اصلاحات آمریکایی	۱۸۹.....
درس هفدهم: پیدایش نهضت روحانیت	۱۸۹.....
درس هجدهم: قیام ۱۵ خرداد	۱۹۰.....
درس نوزدهم: تحولات ایران پس از تبعید	۱۹۰.....
درس بیستم: ایران در مسیر انقلاب اسلامی	۱۹۱.....
درس بیست و یکم: پیروزی انقلاب اسلامی	۱۹۲.....
درس بیست و دوم: دولت موقت	۱۹۲.....
درس بیست و سوم: اولین دوره ریاست	۱۹۲.....
درس بیست و چهارم: جنگ تحمیلی	۱۹۳.....
درس بیست و پنجم: آرمانهای انقلاب	۱۹۳.....
درس بیست و ششم: بیداری اسلامی	۱۹۴.....

بخش ششم: زبان انگلیسی (۲)

lesson1:	
The value of knowledge.	۱۹۶.....
lesson2:	
Traveling the world	۲۰۷.....
Work book: lesson1	۲۱۹.....
Work book: lesson2	۲۲۵.....

بخش هفتم: عربی، زبان قرآن

الدرس الاول	۲۳۴.....
الدرس الثانی	۲۳۷.....
الدرس الثالث	۲۴۱.....
الدرس الرابع	۲۴۴.....

بخش هشتم: شیمی

فصل اول: ساختار اتم و مفاهیم پایه شیمی	۲۴۸.....
فصل دوم: فرآیندهای شیمیایی	۲۵۹.....
فصل سوم: محلول و کلوئید	۲۶۷.....
فصل چهارم: الکتروشیمی	۲۷۳.....
فصل پنجم: ترکیب‌های کربن دار	۲۷۹.....

بخش اول:

ریاضی ۲

۱ تابع

رابطه بین کمیت‌ها

مفهوم تابع

بازه‌ها

نمادگذاری تابع‌ها

نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

۲ تابع‌های خطی و درجه دوم و کاربرد آنها

در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

تابع‌های خطی

تابع‌های درجه دوم

کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها

کاربرد تابع‌ها در حل نامعادله‌ها

۳

زاویه‌های دلخواه و نسبت‌های

مثلثاتی آنها

زاویه چرخش

واحد اندازه‌گیری زاویه: رادیان

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه

شیب خط و تانژانت زاویه‌ها

۴

لگاریتم و خواص آن

لگاریتم

خواص لگاریتم

۵

آمار توصیفی

خط بهترین برازش

درون‌یابی و برون‌یابی

میانه

نمودار جعبه‌ای

رابطه بین کمیت‌ها

بسیاری از کمیت‌های اطراف ما به نوعی با هم ارتباط دارند، از این ارتباط می‌توان استفاده کرد و با داشتن مقدار یکی، دیگری را به دست آورد. به عنوان مثال مساحت یک مربع و طول ضلع آن دو کمیت مرتبط هستند که در این حالت اگر طول ضلع مربعی را بدانیم می‌توانیم مساحت آن را نیز بیابیم و برعکس اگر مساحت مربعی را بدانیم می‌توانیم طول آن را نیز بیابیم.

تذکر: برای آنکه بهتر بتوانیم رابطه بین دو کمیت را بیان کنیم، هر یک از آنها را نام‌گذاری کرده و رابطه بین آن‌ها را می‌نویسیم. در واقع برای شناخت رابطه بین دو کمیت باید بدانیم که این کمیت‌ها چه مقدارهایی می‌توانند داشته باشند و شیوه محاسبه یکی برحسب دیگری چیست.

مثال: رابطه بین دو کمیت محیط مربع و طول ضلع آن را نوشته و جدول زیر را کامل کنید.

حل: اگر ضلع مربع را x و محیط آن را P بنامیم داریم: $P = 4x$				
حال جدول را کامل می‌کنیم:				
طول ضلع	۱	۲	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
محیط	۴	۸	۲	۶

$$x = 1 \Rightarrow P = 4 \times 1 = 4$$

$$P = 8 \Rightarrow P = 4x \Rightarrow 8 = 4x \Rightarrow x = 2$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow P = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$P = 6 \Rightarrow 6 = 4x \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

مثال: الف) آیا با مشخص بودن محیط یک دایره، می‌توان مساحت آن را مشخص کرد؟

ب) رابطه بین دو کمیت محیط دایره و مساحت دایره را بنویسید.

پ) اگر محیط دایره‌ای 2π باشد، مساحت آن چقدر است؟

ت) اگر مساحت دایره‌ای 5π باشد محیط آن چقدر است؟

ث) هر یک از این دو کمیت‌های محیط و مساحت چه مقادیری می‌توانند داشته باشند؟

حل: الف) بله

ب) اگر محیط دایره را P و مساحت دایره را S بنامیم داریم:

$$P = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{P}{2\pi}$$

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \pi \times \frac{P^2}{4\pi^2} = \frac{P^2}{4\pi} \Rightarrow S = \frac{P^2}{4\pi}$$

$$S = \frac{P^2}{4\pi} \Rightarrow S = \frac{(2\pi)^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$$

$$S = \frac{P^2}{4\pi} \Rightarrow 5\pi = \frac{P^2}{4\pi} \Rightarrow P^2 = 20\pi^2 \Rightarrow P = \sqrt{20\pi^2} = \pi\sqrt{20} = \pi\sqrt{4 \times 5} = 2\pi\sqrt{5}$$

ث) هر کدام از دو کمیت‌های محیط و مساحت دایره می‌توانند اعدادی نامنفی باشند یعنی $P \geq 0$ و $S \geq 0$

مثال: خودرویی را در نظر بگیرید که گنجایش ۵۰ لیتر بنزین را دارد، و این خودرو به طور متوسط در هر ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند و باک این خودرو قبل از حرکت پر شده است.

الف) اگر مقدار بنزین موجود در باک را برحسب لیتر V و مسافت طی شده برحسب کیلومتر را d بنامید رابطه بین دو کمیت مقدار بنزین در باک و مسافت طی شده را بنویسید.

ب) اگر توصیه شود که برای صدمه ندیدن موتور حداقل ۳ لیتر بنزین در باک موجود باشد برای سالم نگه داشتن موتور حجم بنزین در باک چه مقداری می‌تواند باشد؟

پ) اگر خودرو ۵۷۵ کیلومتر مسافت را طی کرده باشد حجم بنزین موجود در باک چقدر است؟

ت) اگر حجم بنزین موجود در باک ۲۰ لیتر باشد، خودرو چه مسافتی را طی کرده است؟

حل: الف) این خودرو به ازای هر لیتر بنزین $\frac{100}{8} = 12.5$ کیلومتر مسافت را طی می‌کند بنابراین رابطه بین مسافت طی شده و حجم بنزین موجود در باک از تناسب زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1 \text{ لیتر}}{12.5 \text{ کیلومتر}} = \frac{50 - V}{d} \Rightarrow d = 12.5(50 - V)$$

ب) حداقل ۳ لیتر و حداکثر ۵۰ لیتر

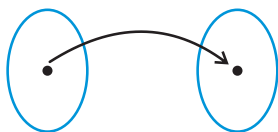
$$d = 12.5(50 - V) \Rightarrow 575 = 12.5 \times 50 - 12.5V \Rightarrow 12.5V = 625 - 575 \Rightarrow 12.5V = 50 \Rightarrow V = \frac{50}{12.5} = 4$$

$$d = 12.5(50 - V) \Rightarrow d = 12.5(50 - 20) = 12.5 \times 30 = 375 \Rightarrow d = 375 \text{ کیلومتر}$$

مفهوم تابع

تعریف تابع: اگر دو کمیت (الف) و (ب) با یکدیگر مرتبط باشند و با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، فقط یک مقدار برای کمیت (ب) به دست آید، در این صورت کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند.

مجموعه مقادیر کمیت (ب) مجموعه مقادیر کمیت (الف)



به عبارتی دیگر تابع، رابطه‌ای بین دو مجموعه A و B است که در آن هر عضو از مجموعه A فقط به یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود.

تذکر مهم: اگر با مشخص شدن یک مقدار کمیت (الف)، بیش از یک مقدار برای کمیت (ب) به دست آید این رابطه تابع نیست.

مثال: کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

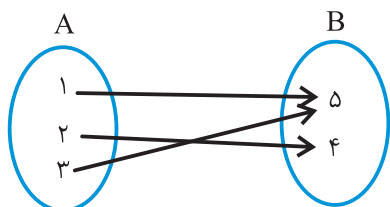
(الف) رابطه بین افراد و غذای مورد علاقه آنها

(ب) رابطه بین افراد و وزن آنها

(پ) رابطه بین مساحت یک مربع و ضلع آن

(ت) رابطه‌ای که به هر عدد ریشه دوم آن را نسبت می‌دهد.

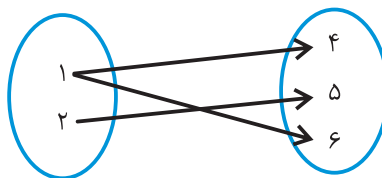
(ج)



کمیت (الف)

کمیت (ب)

(ث)



حل: (الف) تابع نیست زیرا ممکن است شخص به دو یا چند غذا علاقمند باشد.

(ب) تابع است، زیرا به هر فرد فقط یک وزن می‌توانیم نسبت دهیم.

(پ) تابع است. زیرا با مشخص شدن اندازه ضلع مربع فقط یک مقدار معین برای مساحت آن به دست می‌آید مثلاً اگر ضلع مربعی ۳ متر باشد مساحت آن ۹ مترمربع می‌باشد.

(ت) تابع نیست زیرا هر عدد مثبت دو ریشه دوم دارد. مثلاً عدد ۲۵ دارای ریشه‌های دوم ۵ و -۵ است.

(ث) تابع نیست زیرا عدد ۱ از کمیت (الف) به دو عدد ۴ و ۶ از کمیت (ب) نسبت داده شده است.

(ج) تابع است. زیرا هر مقدار از کمیت A فقط به یک مقدار از کمیت B نسبت داده شده است.

تعریف دامنه و ضابطه تابع:

اگر کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد، مقادیری که کمیت (الف) می‌تواند داشته باشد را دامنه این تابع می‌نامند و قانونی را که مقادیر کمیت

(ب) را برحسب مقادیر کمیت (الف) به دست می‌دهد، قانون یا ضابطه این تابع گویند.

مثال: رابطه $y = x^2$ را در نظر بگیرید.

(الف) آیا x تابعی از y است؟ چرا؟

(ب) آیا y تابعی از x است؟ چرا؟

حل:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \quad \text{الف) خیر}$$

زیرا برای $y = 9$ دو مقدار ± 3 برای x به دست می‌آید. به طور کلی در این رابطه برای هر مقدار مثبت y دو مقدار برای x به دست می‌آید.

(ب) بله. زیرا برای هر مقدار x، فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید. دامنه این تابع تمام اعداد حقیقی R است.

مثال: رابطه $|r| = S + 2$ را در نظر بگیرید.

(الف) آیا r تابعی از S است؟

حل: الف) خیر، زیرا برای $S = 0$ دو مقدار ± 2 برای r به دست می‌آید.

$$S = 0 \Rightarrow |r| = 0 + 2 \Rightarrow |r| = 2 \Rightarrow r = \pm 2$$

(ب) آیا S تابعی از r است؟

حل: ب) بله، S تابعی از r است زیرا برای هر مقدار r فقط یک مقدار برای S به دست می‌آید.

$$|r| = S + 2 \Rightarrow S = |r| - 2$$

مثال: رابطه $y = x^3$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا x تابعی از y است؟

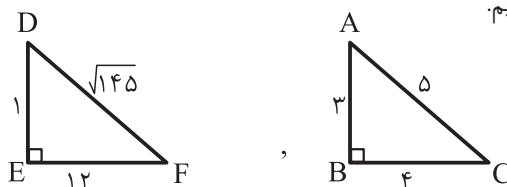
حل: الف) بله. $x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

ب) آیا y تابعی از x است؟

بله، زیرا برای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

مثال: آیا محیط مثلث تابعی از مساحت آن است؟ چرا؟

حل: خیر. اگر دو مثلث زیر را در نظر بگیریم.



$$S_{DEF} = \frac{1 \times 12}{2} = 6, \quad S_{ABC} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

این دو مثلث مساحت‌شان برابر است

ولی محیط‌شان برابر نیست

$$ABC \text{ محیط} = \text{جمع سه ضلع} = 3 + 4 + 5 = 12$$

$$DEF \text{ محیط} = 1 + 12 + \sqrt{145} = 13 + \sqrt{145}$$

در این مثال می‌بینیم که برای مقدار ۶ مساحت، دو مقدار مختلف برای محیط به دست آمده است پس محیط مثلث تابعی از مساحت آن نمی‌باشد.

بازه‌ها

بازه‌ها گونه‌ای دیگر از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی می‌باشند.

انواع بازه: فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند و $a < b$ در این صورت:

الف) بازه بسته a و b : مجموعه تمام اعداد حقیقی بین a و b و خود a و b تشکیل بازه بسته a و b می‌دهد و با $[a, b]$ نشان می‌دهند به عبارتی دیگر:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



ب) بازه باز a و b : مجموعه تمام اعداد حقیقی بین a و b است و با (a, b) نشان داده می‌شود.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



ج) بازه نیم باز یا نیم بسته: اگر از بازه بسته $[a, b]$ ابتدا یا انتهای آن را حذف کنیم بازه نیم باز یا نیم بسته به دست می‌آید که به دو صورت

زیر می‌باشند.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



تذکره ۱: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (a, +\infty) \quad (2)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-\infty, a) \quad (3)$$

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

حل:

نوع بازه	نمایش روی محور	نمایش با نماد مجموعه	نمایش با بازه
نیم باز		$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$	$[-1, 2)$
بسته		$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$	$[0, 1]$
نیم باز		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$	$(-\infty, 1]$
باز		$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$	$(2, 3)$

مثال: مجموعه جواب نامعادله $3 \leq \frac{x}{2} - 1 < 8$ را به صورت بازه نشان داده و روی محور نشان دهید.

$$3 \leq \frac{x}{2} - 1 < 8 \xrightarrow{+1} 4 \leq \frac{x}{2} < 9 \Rightarrow 1 < \frac{x}{2} \leq 4 \xrightarrow{\times 2} 2 < x \leq 8$$

حل:



مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $(-\infty, 2] \cup (1, 5]$

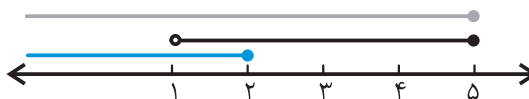
ب) $(-2, 3) \cap [-1, 5]$

ج) $[-3, 7) - (2, 8]$

حل: در این طور مسائل بهتر است ابتدا بازه‌ها را روی محور رسم کرده سپس حاصل را بیابیم.

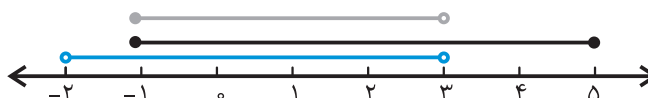
الف)

$(-\infty, 2] \cup (1, 5] = (-\infty, 5]$



ب)

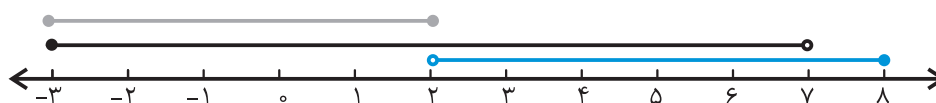
$(-2, 3) \cap [-1, 5] = [-1, 3)$



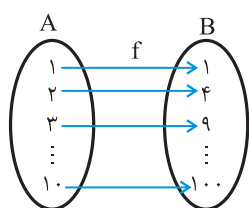
ج)

$[-3, 7) - (2, 8] = [-3, 2]$

باید از $[-3, 7)$ بازه $(2, 8]$ را حذف کنیم که طبق نمودار داریم:



نمادگذاری تابع‌ها



از آن جایی که رابطه‌ی بین کمیت‌ها به شکل‌های مختلفی می‌باشند و تابع‌های زیادی وجود دارند بنابراین بهتر است نامی برای آن‌ها انتخاب کنیم تا کار کردن با آن‌ها ساده‌تر شود به عنوان مثال اگر تابع زیر که کمیت‌های A را به B نظیر می‌کند را f بنامیم:

می‌بینیم که این تابع عضو ۱ از A را به عضو ۱ از B و عضو ۲ از A را به عضو ۴ از B و ... و عضو n از A را به عضو n^2 از B وصل می‌کند

برای راحتی کار می‌نویسیم:

$$f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, \dots, f(n) = n^2$$

و به $f(1)$ مقدار تابع f در ۱ می‌گویند و می‌خوانند f یک و چون تابع f هر عضو A را به مربع یا توان دو آن عدد نظیر می‌کند ضابطه یا قانون

این تابع را به صورت $f(x) = x^2$ می‌نویسیم (بخوانید f ایکس) دامنه این تابع $D_f = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ می‌باشد.

نکته: در هر تابع، مقدار تابع فقط برای مقادیر دامنه محاسبه می‌شود و حتی اگر مقادیر خارج از دامنه را بتوان در قانون تابع قرار داد و مقداری را برای آن محاسبه کرد، عدد محاسبه شده معنایی ندارد. به عبارت دیگر اگر f یک تابع و x متغیر آن باشد مقادیر $f(x)$ را فقط برای x هایی محاسبه می‌کنیم که این x ها در دامنه تابع باشند.

مثال: تابع f با قانون $f(x) = 3x - 2$ و دامنه $[-2, 5]$ را در نظر بگیرید و مقادیر زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $f(1)$ ب) $f(\frac{1}{2})$ پ) $f(-\frac{1}{6})$ ت) $f(f(2))$ ث) $f(6)$ ج) $f(\sqrt{2})$

حل:

الف) $f(1) = 3(1) - 2 = 1$

ب) $f(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2}) - 2 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2}$

پ) $f(-\frac{1}{6}) = 3(-\frac{1}{6}) - 2 = -\frac{3}{6} - 2 = -\frac{1}{2} - 2 = \frac{-1-4}{2} = -\frac{5}{2}$

ت) $f(f(2)) =$

در این طور مواقع ابتدا داخل پرانتز یعنی $f(2)$ را حساب می‌کنیم.

$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$

حال $f(4)$ را می‌یابیم:

$f(f(2)) = f(4) = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$.

ث) چون 6 در دامنه تابع نیست بنابراین $f(6)$ معنایی ندارد.

ج) $f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2}) - 2 = 3\sqrt{2} - 2$

مثال: طول یک مستطیل 5 واحد بیشتر از عرض آن است.

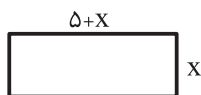
الف) رابطه ریاضی بنویسید که محیط مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند و تابع را g و متغیر آن را x بنامید،

ب) $g(3)$ را بیابید.

پ) آیا $g(-2)$ معنایی دارد؟

ت) دامنه این تابع را مشخص کنید.

حل: اگر عرض مستطیل را x بنامیم، طول مستطیل برابر است با $x + 5$ بنابراین:



الف) $g(x) = 4x + 10 \Rightarrow g(x) = 4x + 10$ (محیط مستطیل = $2(\text{عرض} + \text{طول}) = 2((x+5) + x) = 2(2x+5) = 4x+10$)

ب)

$g(3) = 4 \times 3 + 10 = 22$

پ) $g(-2)$ معنایی ندارد زیرا عرض مستطیل منفی نمی‌شود به عبارتی دیگر، -2 در دامنه تابع g نیست.

ت)

دامنه $D_g = (0, +\infty)$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - 3x + 1$ و $D_f = \mathbb{R}$ باشد مقادیر زیر را بیابید.

الف) $f(0)$ ب) $f(-2) =$ پ) $f(f(1)) =$ ت) $f(a+2) =$ ث) $2f(-1) + 3f(2) =$

حل:

الف) $f(0) = (0)^2 - 3(0) + 1 = 1$

ب) $f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$

پ) ابتدا $f(1)$ را می‌یابیم.

$f(1) = (1)^2 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

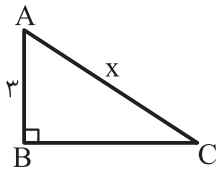
ت) $f(a+2) = (a+2)^2 - 3(a+2) + 1 = a^2 + 4a + 4 - 3a - 6 + 1 = a^2 + a - 1$

ث) ابتدا $f(-1)$ و $f(2)$ را می‌یابیم:

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 1 + 3 + 1 = 5 \\ f(2) &= 2^2 - 3(2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2f(-1) + 3f(2) = 2 \times 5 + 3 \times (-1) = 10 - 3 = 7$$

مثال: طول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳ سانتی‌متر است. مساحت این مثلث تابعی از وتر آن است این تابع را f بنامید و متغیر آن را x نامیده و دامنه و قانون این تابع را مشخص کنید.

حل:



$$AB = 3, AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow 3^2 + BC^2 = x^2 \Rightarrow BC^2 = x^2 - 9 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{BC \times AB}{2} = \frac{\sqrt{x^2 - 9} \times 3}{2}$$

حال اگر مساحت را f بنامیم، ضابطه یا قانون این تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 9}}{2}$$

از آن جایی که عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد پس داریم:

$$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3$$

چون x طول وتر است و منفی نمی‌شود پس $x \geq 3$ بنابراین $D_f = [3, +\infty)$ دامنه f

نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

جدول مربوط به یک تابع: برای هر تابع می‌توان جدولی دو سطری رسم کرد که در سطر اول، مقدارهایی از دامنه و در سطر دوم مقدار تابع به ازای مقادیر دامنه قرار می‌گیرد. این جدول را جدول تابع می‌نامند. که برای شناخت چگونگی تغییرات مقادیر تابع که رفتار تابع نامیده می‌شوند بسیار مفید است.

نمودار تابع: به کمک جدول یک تابع می‌توان نموداری در صفحه رسم کرد هر زوج اعدادی در جدول که از اعداد دامنه تابع (سطر اول) و مقدار تابع (سطر دوم) تشکیل شده است نقطه‌ای را در صفحه مختصات مشخص می‌کند، مجموعه این نقاط شکلی را در صفحه مشخص می‌کنند که نمودار تابع نامیده می‌شود. از طریق نمودار تابع، رفتار تابع را بهتر می‌توان تشخیص داد.

مثال: تابع $f(x) = x^2 - 1$ را در نظر بگیرید.

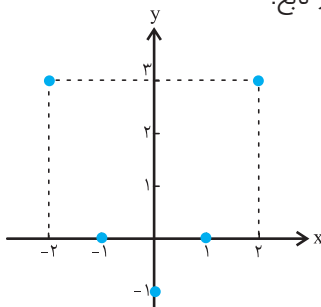
الف) جدول و نمودار این تابع را با دامنه $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ رسم کنید.

حل: ابتدا مقادیر تابع را به ازای نقاط دامنه آن می‌یابیم:

$$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3, \quad f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0.$$

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1, \quad f(1) = 1^2 - 1 = 0, \quad f(2) = 2^2 - 1 = 3$$

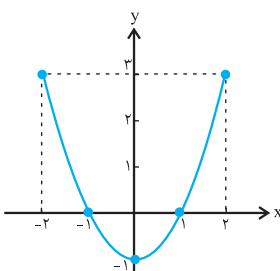
نمودار تابع:



جدول تابع:

x (دامنه)	-2	-1	0	1	2
y یا $f(x)$ مقدار تابع	3	0	-1	0	3

ب) نمودار تابع را با دامنه $[-2, 2]$ رسم کنید و چگونگی تغییرات مقادیر تابع (رفتار تابع) را در دامنه‌اش بررسی کنید.



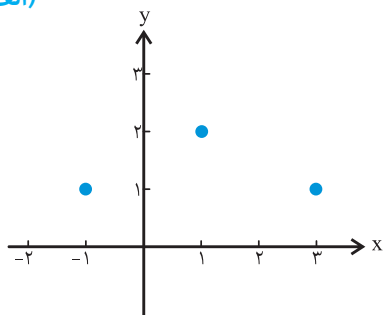
حل: چون دامنه تابع بازه بسته $[-2, 2]$ است، نقاط به دست آمده در جدول قسمت الف را به هم وصل می‌کنیم:

رفتار تابع در بازه $[-2, 0]$ کاهشی (نزولی) است به این معنی که با افزایش مقدار x در این بازه مقدار تابع کاهش می‌یابد و رفتار تابع در بازه $[0, 2]$ افزایشی (صعودی) است، به این معنی که با افزایش مقدار x در این بازه مقدار تابع افزایش می‌یابد.

نکته: برای به دست آوردن دامنه تابع از روی نمودار، کافی است از تمام نقاط روی نمودار بر محور x ها عمود کنیم پای عمودها دامنه تابع را می‌دهند به عبارتی دیگر نمودار را بر محور x ها تصویر کنیم.

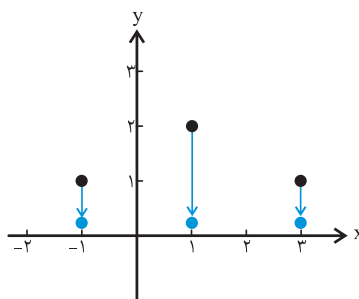
مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.
حل.

الف)

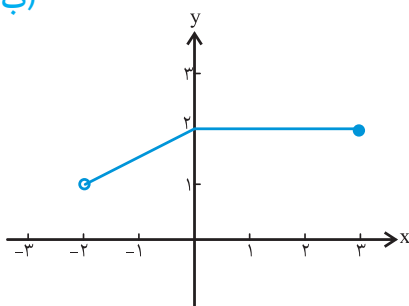


اگر نقاط را روی محور x ها تصور کنیم (یا بر محور x ها عمود کنیم) داریم:

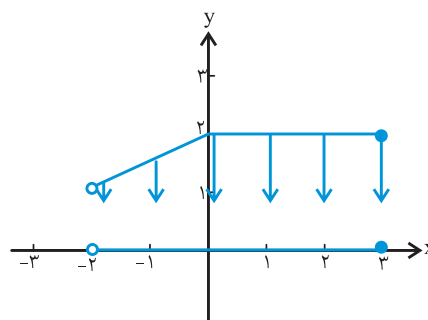
$$\text{دامنه} = \{-1, 1, 3\}$$



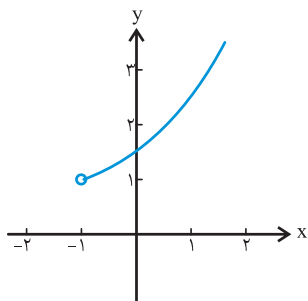
ب)



$$\text{دامنه} = (-2, 3]$$

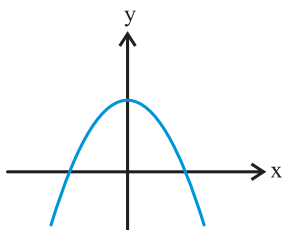


پ)



$$\text{دامنه} = (-1, +\infty)$$

ت)

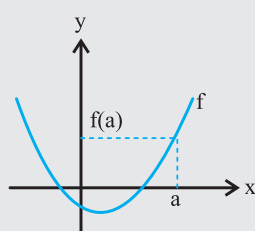


$$\text{دامنه} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

نکته: در نمودار تابع f ، اگر از نقطه $x = a$ خطی بر محور x ها عمود کنیم تا نمودار را قطع

کند، سپس از آن نقطه خطی موازی محور x ها رسم کنیم تا محور y ها را قطع کند این نقطه (محل

تقاطع با محور y ها) همان مقدار تابع f در نقطه a یعنی $f(a)$ می‌باشد.



مثال: نمودار تابع g به صورت زیر می باشد:

حل:

الف) دامنه g را بیابید.

نمودار را بر محور x ها تصویر می کنیم: g دامنه $[-2, 6]$

ب) مقادیر g را به ازای 0 و -1 و 2 و 4 و -2 بیابید.

$$g(0) = 3, \quad g(-1) = 2, \quad g(2) = 0, \quad g(4) = -2, \quad g(-2) = 1$$

پ) آیا $g(-3)$ و $g(6)$ معنایی دارند؟ چرا؟

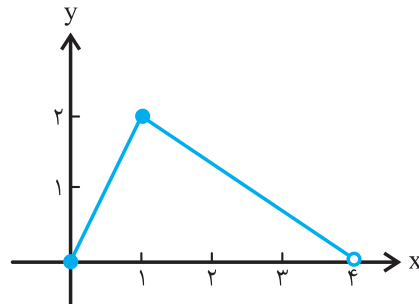
$g(-3)$ و $g(6)$ معنایی ندارند. زیرا -3 و 6 عضو دامنه تابع نیستند.

ت) رفتار تابع را در دامنه اش بررسی کنید.

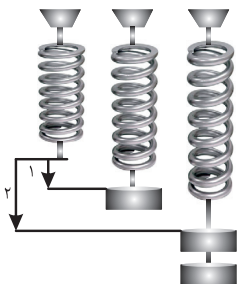
رفتار تابع در بازه $[-2, 0]$ افزایشی است و در بازه $[0, 4]$ کاهشی است و در بازه $[4, 6]$ افزایشی است.

مثال: نمودار تابعی رسم کنید که دامنه آن $[0, 4]$ باشد و در بازه $[0, 1]$ افزایشی و در بازه $[1, 4]$ کاهشی باشد.

حل:



فعالیت ۱



فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن 10 سانتیمتر است. به ازای هر 15 گرم که به آن آویزان می کنیم، 1 سانتیمتر به طول آن اضافه می شود. حداکثر طول این فنر 60 سانتیمتر است و اگر بیش از این کشیده شود پاره می شود.

۱ در جای خالی کلمه مناسب بگذارید.

الف) هر چه جرم وزنه آویزان شده شود، طول فنر می شود.

بیشتر - بیشتر

ب) اگر به این فنر یک وزنه 300 گرمی آویزان کنیم برای پیدا کردن طول فنر، چون به ازای هر 15 گرم، 1 سانتیمتر به طول آن اضافه می شود، پس ابتدا 300 را بر تقسیم می کنیم و سپس

15 - عدد به دست آمده را با طول اولیه فلز جمع می کنیم تا طول به دست آید. $300 \div 15 = 20$ (توجه شود طول فنر اگر از 60 بیشتر بشود، فنر پاره می شود)

۲ در حالت کلی، اگر جرم وزنه آویزان شده را بر حسب گرم با a نشان دهیم و طول فنر را بر حسب سانتیمتر با l نشان دهیم، رابطه ای بنویسید که مقدار l را بر حسب مقدار a بیان کند.

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{\Delta x_2}{1} = \frac{a}{15} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{a}{15}, \quad l = 10 + \frac{a}{15}$$

۳ حداکثر جرمی که می توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟ (راهنمایی: برای پیدا کردن حداکثر جرمی که می توانیم به این فنر آویزان کنیم، ابتدا باید حداکثر تغییر طول فنر را به دست آورد)

$$\left. \begin{array}{l} \text{حداکثر طول فنر} = 60 \text{ cm} \\ \text{طول اولیه فنر} = 10 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{طول اضافه شده با وزنه} = 60 - 10 = 50 \text{ cm}$$

پس این فنر می تواند حداکثر 50 cm در اثر افزایش وزنه اضافه طول داشته باشد. و از طرفی هم می دانیم هر 15 گرم وزنه باعث افزایش 1 سانتی متری فنر می شود.

$$50 \times 15 = 750 \text{ gr}$$



مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با آن یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعه بریده شده رابطه دارد.

۱ آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

خیر. چون طول مفتول بریده شده هر چند کوچک هم باشد می‌توان از آن یک مثلث با مساحت خیلی کوچک ساخت.

۲ اگر طول قطعه بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم، چه مقادیری می‌تواند باشد؟ $..... < x <>$

طول مفتول بریده شده می‌تواند از صفر تا صد سانتی‌متر باشد. $0 < x < 100$

۳ اگر طول قطعه بریده شده از مفتول ۸ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع ساخته شده چند سانتی‌متر مربع است؟

$$4 = 2^2 = \text{مساحت مربع} \Rightarrow 2 = \frac{8}{4} = \text{ضلع مربع} \Rightarrow 8 = \text{طول مفتول}$$

۴ اگر طول قطعه بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم و مساحت مربع ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان می‌کند.

می‌دانیم مربع دارای چهارضلع برابر است پس اگر قطعه‌ای به طول x داشته باشیم طول

ضلع مربع $\frac{x}{4}$ می‌باشد. پس مساحت مربع:

$$S = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$$

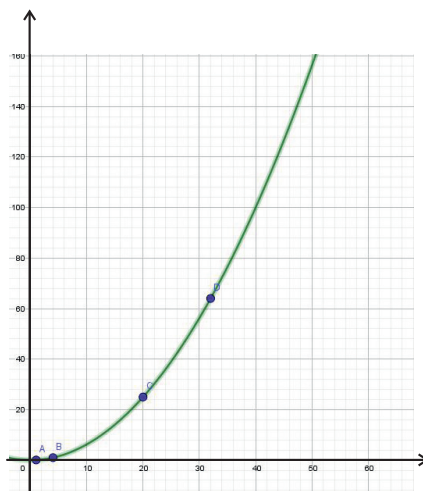
با توجه به پاسخ پرسشهای بالا، به سوالهای زیر پاسخ دهید.

۵ جدول زیر، ارتباط بین طول قطعه بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

$$s = \frac{x^2}{16} \Rightarrow x^2 = 16s \Rightarrow x = 4\sqrt{s}$$

طول قطعه بریده شده (بر حسب سانتی‌متر)	۱	۴	۲۰	۳۲	۴۸	۶۰	۱۰۰
مساحت مربع (بر حسب سانتی‌متر مربع)	$\frac{1^2}{16} = \frac{1}{16}$	۱	$\left(\frac{20}{4}\right)^2 = 25$	$\left(\frac{32}{4}\right)^2 = 64$	۱۴۴	$\left(\frac{60}{4}\right)^2 = 15^2 = 225$	$\left(\frac{100}{4}\right)^2 = 25^2 = 625$

۶ در شکل زیر، محور افقی طول قطعه بریده شده را بر حسب سانتی‌متر و محور عمودی مساحت مربع ساخته شده را بر حسب سانتی‌متر مربع نشان می‌دهد. جدول بالا، نقاطی در این صفحه مختصات را نشان می‌دهد. ۴ نقطه اول جدول را در نمودار زیر بیابید و آنها را به طور تقریبی به هم وصل کنید.



۷ با توجه به نمودار، برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰ سانتیمتر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟
ابن مقدار را به کمک رابطه قسمت (۴) نیز به دست آورید و سپس مقایسه کنید.

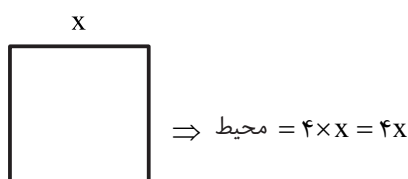
$$s = 40 \text{ cm}^2, \quad s = \frac{x^2}{16} \Rightarrow x^2 = 16s \Rightarrow x = 4\sqrt{s} \Rightarrow x = 4\sqrt{40} \text{ cm}$$

۸ آیا پاسخ به سوالات (۲) و (۴) برای شناخت رابطه بین مساحت مربع ساخته شده و طول قطعه بریده شده از مفتول کافی هستند؟
بله. زیرا هم بازه تغییرات x و هم رابطه مساحت مربع بر حسب x را در اختیار داریم و می‌توانیم رفتار آن را توصیف نماییم و با توجه به اینکه گفته شده مقدار x یک مقدار مثبت است مقدار s بر حسب x مشخص است.

مسائل

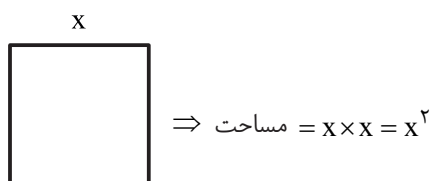
۱ کدام یک از گزینه‌های زیر دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

(الف) طول ضلع یک مربع و محیط آن؛



طول ضلع مربع و محیط آن کمیت‌های مرتبط هستند. اگر طول ضلع مربع x فرض بشود محیط مربع $4 \times x$ است.

(ب) طول ضلع یک مربع و مساحت آن؛



طول ضلع مربع و مساحت آن کمیت‌های مرتبط هستند. اگر طول ضلع مربع x باشد مساحت آن x^2 است.

(پ) محیط یک مثلث و طول بزرگ‌ترین ضلع آن؛

مرتبط نیستند

(ت) شعاع یک دایره و محیط آن؛

شعاع دایره و محیط آن دارای رابطه هستند یعنی با یکدیگر مرتبط هستند اگر شعاع دایره r فرض بشود.

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r \quad (\pi, 3/1415\dots)$$

(ث) شعاع یک دایره و مساحت آن؛

شعاع یک دایره و مساحت آن با یکدیگر مرتبط هستند.

$$\text{مساحت} = \pi r^2 \quad (\pi = 3/1415\dots)$$

(ج) مساحت یک مستطیل و محیط آن.

مرتبط نیستند.

۲ آیا درجه حرارت یک مکان بر حسب سانتی‌گراد و درجه حرارت آن بر حسب فارنهایت مرتبط هستند؟ اگر مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین آنها را بنویسید.

بله. با یکدیگر مرتبط هستند و رابطه‌ی آنها به صورت زیر است.

$$[^\circ\text{C}] = ([^\circ\text{F}] - 32) \times \frac{5}{9} \quad \text{تبدیل درجه فارنهایت به سلسیوس}$$

$$[^\circ\text{F}] = [^\circ\text{C}] \times \frac{9}{5} + 32 \quad \text{تبدیل درجه سلسیوس به فارنهایت}$$

۳ وزن جلد کتابی (با حداکثر ۲۰۰ صفحه) برابر ۴۰ گرم و وزن هر ورق آن ۰/۸ گرم است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان وزن کتاب را بر حسب تعداد ورق‌های آن به دست آورد.

$$\begin{aligned} \text{وزن جلد کتاب} &= 40 \text{ gr} \\ \text{وزن ورق} &= 0.8 \text{ gr} \\ \text{وزن ورق} &= 0.8 \times x + 40 \end{aligned}$$

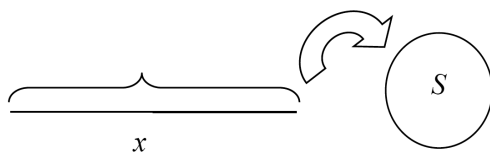
۴ راننده‌ای مسافت ۳۵۰ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر بر ساعت در حال طی کردن است. الف) آیا مقدار مسافتی که طی می‌کند (d) و زمان (t)، دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، چه رابطه‌ای بین آنها برقرار است؟

بله. با توجه به اینکه گفته شده راننده با سرعت ثابت حرکت می‌کند می‌توان گفت دو کمیت با یکدیگر رابطه دارند.
ب) هر یک از این دو کمیت چه مقداری را می‌توانند داشته باشند؟
بیشترین زمان ممکن را به دست می‌آوریم.

$$d_{\max} = 350 \text{ km} \Rightarrow 0 \leq d \leq 350$$

$$V = v_0 \cdot \frac{\text{km}}{h}$$

$$d_{\max} = V \times t_{\max} \Rightarrow 350 = 70 \times t_{\max} \Rightarrow t_{\max} = 5h \Rightarrow 0 \leq t \leq 5$$



۵ طنابی به طول ۱۰ متر در اختیار داریم. قطعه‌ای از آن را می‌بریم و با قطعه بریده شده یک حلقه دایره‌ای شکل می‌سازیم. مساحت حلقه دایره‌ای شکل به دست آمده با طول قطعه بریده شده رابطه دارد. الف) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟ خیر.

ب) طول قطعه بریده شده از طناب، چه مقداری می‌تواند باشد؟
از صفر کمی بیشتر می‌تواند باشد تا ۱۰ در واقع اگر طول طناب بریده شده را با L در نظر بگیریم.

پ) اگر طول قطعه بریده شده از طناب ۴ متر باشد، مساحت دایره ساخته شده چقدر مربع است؟

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r = 4 \Rightarrow r = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi}$$

ت) اگر طول قطعه بریده شده از طناب را با x و مساحت دایره ساخته شده با آن را با s نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار s را بر حسب مقدار x بیان کند.

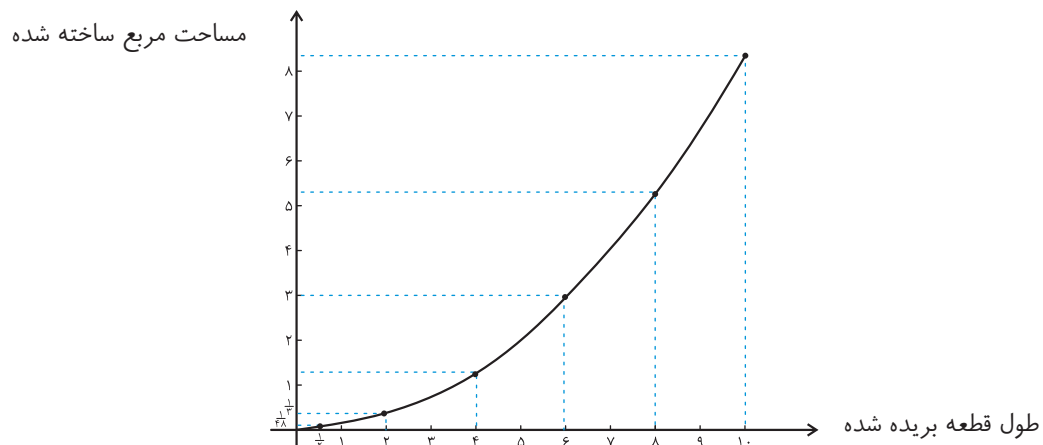
$$\text{محیط دایره} = x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

$$\text{مساحت دایره} = S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi \times \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \pi \times \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi} \Rightarrow S = \frac{x^2}{4\pi}$$

ث) جدول زیر، ارتباط بین طول قطعه بریده شده و مساحت دایره ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید (فرض کنید $\pi \approx 3$).

طول قطعه بریده شده	$\frac{1}{2}$	۲	۴	۶	۸	۱۰
مساحت دایره	$\frac{(\frac{1}{2})^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}$	$\frac{2^2}{4\pi} = \frac{1}{\pi}$	$\frac{4^2}{4\pi} = \frac{4}{\pi}$	$\frac{6^2}{4\pi} = \frac{9}{\pi}$	$\frac{8^2}{4\pi} = \frac{16}{\pi}$	$\frac{10^2}{4\pi} = \frac{25}{\pi}$

ج) به کمک جدول این نقاط را بیابید و آنها را به طور تقریبی به هم وصل کنید.



چ) برای شناخت رابطه مساحت دایره ساخته شده و طول قطعه بریده شده از طناب، چه مواردی را باید بدانیم؟ ابتدا حدود تغییرات طول طناب در واقع L و رابطه‌ی بین طول طناب و مساحت دایره الزامی است.

۶) دو کمیت مرتبط به هم مثال بزنید. هر یک را نام‌گذاری کنید و در صورت امکان رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید. رابطه میان حجم استوانه و شعاع آن وقتی ارتفاع استوانه مثلاً ۱۰ باشد. یا رابطه میان مصرف بنزین در مسافت طی شده با سرعت ثابت

کار در کلاس ۲

۱) در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده، تابعی از طول فنر است؟ چرا؟ جرم جسم تابعی از طول فنر نیست، بلکه طول فنر تابعی از جرم جسم است. زیرا اگر فنر پاره بشود نمی‌توان گفت وزن دقیقاً چقدر بوده و دیگر نمی‌توان گفت تابع بوده است.

۲) در مثال (۱)، آیا مسافت طی شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین مصرف شده است؟ بله. هست. زیرا هر چه مسافت طی شده بیشتر باشد بنزین بیشتری مصرف می‌گردد.

کار در کلاس ۳

۱) در مثال (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط ماشین را بر حسب حجم بنزین باقی مانده در باک، بیان می‌کند.

$$V = 60 - 0.08L \Rightarrow V - 60 = -0.08L \Rightarrow L = \frac{60 - V}{0.08} \Rightarrow L = 750 - 12.5V$$

$$L = 750 - 12.5V \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 60\}$$

۲) در کاردر کلاس (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده را بر حسب طول قسمت بریده شده از مفتول، بیان می‌کند.

$$S = \frac{x^2}{16}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 100\}$$

مسائل

۱) آیا دمای کلاس شما در یک روز معین، تابعی از زمان است؟ چرا؟ خیر. زیرا نمی‌توان رابطه‌ای برای آن به دست آورد و مشخص نمی‌باشد.

۲) دمای هوا در یک منطقه در ارتفاعات مختلف از سطح دریا، متفاوت است و به ازای هر ۱۵۰ متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. آیا دمای یک منطقه تابعی از ارتفاع آن منطقه از سطح دریا است؟ چرا؟ بله. اگر منظور سوال در یک لحظه مشخص باشد می‌توان گفت این امر صحیح است زیرا می‌توان گفت دماها در سطح دریا هر چه باشد هر ۱۵۰ متری که به ارتفاع اضافه بشود، ۱ درجه از هوا کم می‌شود.

۳) یک مغازه شیرینی فروشی ماهانه ۷ میلیون تومان بابت اجاره مغازه و آب و برق و دستمزد کارگران، به طور ثابت پرداخت می‌کند. تولید هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان هزینه مواد اولیه دارد. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش میرسد. اگر x میزان تولید شیرینی باشد:

الف) درآمد این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) هزینه ماهانه این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

پ) سود این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

x : میزان تولید ، $a = 3000$: هزینه مواد اولیه هر کیلو شیرینی ، $C = 7000000$: هزینه‌های ثابت ، y = میزان درآمد

، $b = 12000$: قیمت فروش هر کیلو شیرینی

الف) $y = bx = 12000x$ ، $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2500\}$

ب) $y = ax + 7000000 = 3000x + 7000000$ ، $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2500\}$

پ) $y = (b - a)x - c \Rightarrow y = 9000x - 7000000$ ، $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2500\}$

۴ از منبع آبی با حجم ۵۰۰ لیتر برای پر کردن یک حوضچه استفاده می‌شود. اگر شیر آب منبع به طور کامل باز باشد، در هر دقیقه ۵ لیتر آب از آن خارج می‌شود.

الف) توضیح دهید که چرا حجم داخل حوضچه تابعی از زمان است.

زیرا هر چقدر زمان سپری شود حجم آب درون حوضچه کاهش می‌یابد پس می‌توان گفت که حجم آب درون حوضچه با زمان رابطه دارد.

ب) قانون این تابع را با نوشتن حجم آب داخل حوضچه بر حسب زمان باز بودن شیر، بنویسید.

$$V = 5t$$

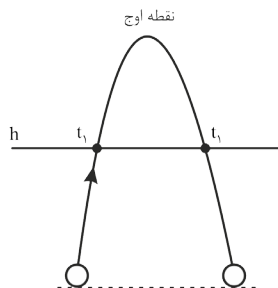
$$\{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 100\}$$

ب) دامنه این تابع را مشخص کنید.

۵ سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. در این صورت ارتفاع سنگ از سطح زمین و زمان، دو کمیت مرتبط هستند.

الف) چرا ارتفاع سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است؟

ب) اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ، زمان شروع پرتاب باشد، دامنه این تابع چیست؟



ب) $D: \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 3\}$

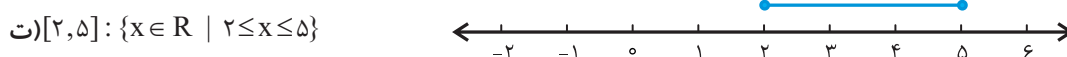
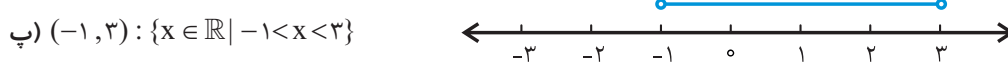
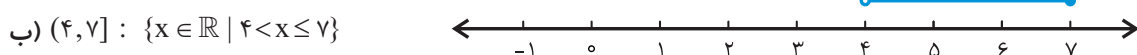
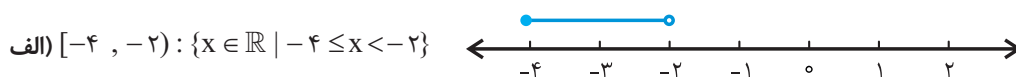
الف) اگر سنگی به بالا پرتاب شود دو مرتبه در ارتفاع h قرار می‌گیرد یک بار در زمان t_1 در مسیر رفت و یک بار در زمان t_2 در مسیر برگشت. اما با دانستن زمان می‌توان مقدار دقیق ارتفاع را مشخص نمود. (در بازه زمانی 0 تا 3 ثانیه) پس می‌توان گفت ارتفاع تابعی از زمان است.

۶ فرض کنیم که x^2 مربع عدد حقیقی x باشد، آیا با مشخص بودن x^2 ، برای x یک مقدار معین در اعداد حقیقی به دست می‌آید؟ آیا یک عدد، تابعی از مربع آن است؟ چرا؟

خیر. به طور مثال فرض کنید $x^2 = 16$ همانطور که مشخص است دو عدد -4 و 4 اگر به توان 2 برسند برابر 16 می‌شوند پس نمی‌توان گفت تابع می‌باشد زیرا شرط اینکه دارای رابطه مشخص باشد را ندارد.

کار در کلاس ۴

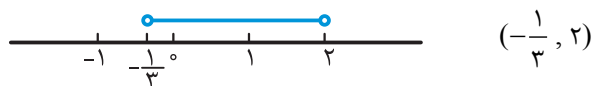
۱ بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش داده و روی یک محور نشان دهید. سپس تعیین کنید $\frac{-3}{10}$ متعلق به کدامیک از این بازه‌ها می‌باشد.



$\frac{-3}{10}$ متعلق به بازه $(-1, 3)$ است.

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور نشان دهید و با نماد بازه‌ها نمایش دهید.

الف) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < 2\}$



ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 55\}$



پ) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 10\}$



ت) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 8\}$



کار در کلاس ۵

۱ بازه $[1, +\infty)$ را روی محور نمایش دهید.



۲ بازه $(-\infty, 1)$ را روی محور نمایش دهید.



۳ اجتماع این دو بازه را روی محور نمایش دهید. اجتماع این دو بازه، چه مجموعه‌ای است؟

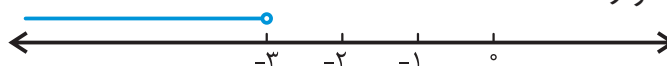
$[1, +\infty) \cup (-\infty, 1) = (-\infty, +\infty)$



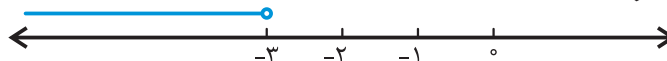
مسائل

۱ مجموعه‌های زیر را با بازه نمایش دهید و روی محور مشخص کنید.

الف) $(-\infty, -3)$



ب) مجموعه اعداد حقیقی کوچکتر از ۳



پ) $[2, +\infty)$



۲ مجموعه اعداد حقیقی بین ۳ و ۵

الف) $(-3, 5)$



۳ مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.

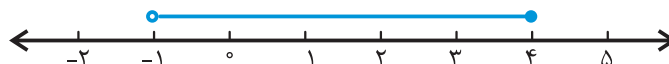
الف) $(0, 3)$



ب) $[-1, 5)$



پ) $(-1, 4]$



۳ مجموعه جواب نامعادله $2x - 5 > 1$ را با یک بازه نمایش دهید.



۴ جدول زیر را کامل کنید.

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۰ و کوچکتر از ۲		$[0, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} 0 \leq x < 2\}$
مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی یک و کوچکتر از ۴		$[1, 4)$	$\{x \in \mathbb{R} 1 \leq x < 4\}$
مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۱		$[1, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} 1 \leq x < +\infty\}$
مجموعه اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۲		$(-\infty, 2]$	$\{x \in \mathbb{R} -\infty < x \leq 2\}$

کار در کلاس ۶

۱ الف) تابع به دست آمده در مثال (۱)، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g بنامید. D_g را بنویسید. قانون تابع g چگونه نوشته می‌شود؟

$$L = \frac{60 - V}{0.08}, \quad g(v) = \frac{60 - V}{0.08}, \quad D_g = \{V \in \mathbb{R} | 5 \leq V \leq 60\}$$

ب) مقدارهای $g(45)$ و $g(18)$ را بیابید. آیا مقدار $g(75)$ معنایی دارد؟ چرا؟

$$g(45) = \frac{60 - 45}{0.08} = 187.5, \quad g(18) = \frac{60 - 18}{0.08} = 525$$

$g(75)$ معنی ندارد. زیرا دامنه‌ی تعریف g $5 \leq V \leq 60$ می‌باشد.

پ) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟
اگر چه متغیر، t فرض بشود، همان t همان V قدیم است.

$$f(t) = \frac{60 - t}{0.08}$$

ت) اگر متغیر این تابع را با v نشان دهیم، مجموعه‌ای که v در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

$$g(v) = \frac{60 - V}{0.08}$$

ث) دو تابع قسمت‌های پ و ت را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دو تابع هم از نظر دامنه و هم از نظر قانون با یکدیگر برابر می‌باشند. پس می‌توان نتیجه گرفت در تابع متغیر مهم نمی‌باشد و می‌توان از هر متغیری که دوست داریم استفاده نماییم. مثلاً $f(k)$ با $f(t)$ هیچ فرقی نمی‌کند. k و t را متغیرهای ظاهری می‌نامیم.

۲ الف) تابع به دست آمده در کار در کلاس (۱) که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند h نامگذاری کنید و D_h را بنویسید.

$$D_h = (0, 100)$$

ب) مقدارهای $h(5)$ و $h(12)$ را بیابید. آیا مقدار $h(200)$ معنایی دارد؟ چرا؟

$$h(5) = \frac{25}{16}, \quad h(12) = \frac{144}{16} = 9, \quad h(200) \text{ معنایی ندارد چون در بازه دامنه نمی‌باشد.}$$

پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

$$h(x) = \frac{x^2}{16}$$

ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

$$k(z) = \frac{z^2}{16}, \quad D_z = (0, 100)$$

ث) دو تابع قسمت‌های پ) و ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

این دو تابع با یکدیگر برابرند، در واقع تغییر متغیرها نمی‌تواند ماهیت یک تابع را عوض کند.



مسائل

۱ جاهای خالی را برای تابع با قانون $f(x) = x^2 - x + 2$ و دامنه $\mathbb{R}$ پر کنید.

x	$x^2 - x + 2$	$f(x)$
-۲	$(-2)^2 - (-2) + 2 = 4 + 2 + 2 = 8$	$f(-2) = 8$
۰	$0^2 - 0 + 2 = 2$	$f(0) = 2$
۲	$2^2 - 2 + 2 = 4$	$f(2) = 4$

۲ تابع g با قانون $g(x) = 4x^2 - 3x$ و دامنه $D_g = [-2, 3]$ را در نظر بگیرید. $g(-2)$ و $g(-\frac{4}{3})$ را محاسبه کنید آیا $g(4)$

معنایی دارد؟ چرا؟

$$g(x) = 4x^2 - 3x \quad D_g = [-2, 3]$$

$$g(-2) = 4(-2)^2 - 3(-2) = 4 \times 4 + 6 = 22$$

$$g(-\frac{4}{3}) = 4(-\frac{4}{3})^2 - 3(-\frac{4}{3}) = 4 \times \frac{16}{9} + 4 = \frac{64 + 36}{9} = \frac{100}{9}$$

$g(4)$ معنی ندارد. زیرا عدد ۴ در دامنه تابع موجود نمی‌باشد.

۳ تابع f با دامنه $\mathbb{R}$ و قانون $f(x) = x^2 - 4$ مفروض است. مقادیر خواسته شده را بیابید.

$$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$$

(الف)

$$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - 4 = \frac{1}{4} - 4 = \frac{1-16}{4} = \frac{-15}{4}$$

(ب)

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 4 = 2 - 4 = -2$$

(پ)

۴ کرایه تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیه تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را به دست آورید که کرایه تاکسی را بر حسب مسافت طی شده بیان می‌کند. با توجه به آن که تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند، دامنه این تابع را مشخص کنید. نامی برای این تابع و متغیر آن انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

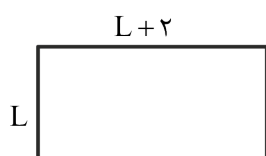
$$f(x) = 50 \times \frac{x}{100} + 600 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} + 600$$

$$600 = \text{ورودی تاکسی}$$

$$D_g : \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 500000\}$$

$$50 = \text{به ازای هر } 100 \text{ متر}$$

۵ مستطیلهایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با L نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-1)$ معنایی دارد؟



$$g(L) = L \cdot (L+2) \Rightarrow g(L) = L^2 + 2L$$

$$D_g = \{L \in \mathbb{R} \mid 0 < L < \infty\}$$

طول مستطیل نمی‌تواند عددی منفی باشد و $g(-1)$ معنی ندارد.

۶ سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با t و ارتفاع از سطح زمین را بر حسب متر اندازه‌گیری کنیم و با $f(t)$ نشان دهیم و لحظه رها کردن سنگ لحظه صفر باشد، قانون این تابع به صورت $f(t) = -5t^2 + 25$ است.

الف) دامنه این تابع را تعیین کنید.

حداکثر مقدار زمان (t) زمانی است که سنگ به زمین برخورد کرده و $f = 0$

$$f(t) = -5t^2 + 25 \quad , \quad D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq \sqrt{5}\}$$

$$0 = -5t^2 + 25 \Rightarrow 5t^2 = 25 \Rightarrow t^2 = 5 \Rightarrow t = \sqrt{5}$$

ب) مقدارهای $f(1)$ و $f(2)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

$$f(1) = -5(1)^2 + 25 = 20 \quad , \quad f(2) = -5(2)^2 + 25 = 5$$

پ) آیا $f(3)$ و $f(-1)$ معنایی دارند؟ چرا؟

خیر. ندارد $f(-1)$ یعنی زمان -1 که وجود ندارد. همچنین $f(3)$ هم معنا ندارد زیرا در زمان $t = \sqrt{5} = 2/2$ به زمین رسیده است.

۲ فعالیت

عدد π تا ده رقم اعشار برابر است با: $\pi \approx 3/1415926535$

برای $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ اگر $f(n)$ رقم n ام اعشاری π را نشان دهد، برای مثال داریم:

$$f(1) = 1 \quad , \quad f(2) = 4$$

۱ جاهای خالی را پر کنید.

$$f(6) = \dots \quad , \quad f(9) = \dots \quad , \quad f(10) = \dots \quad , \quad f(8) = \dots$$

۲ دامنه این تابع را با یک مجموعه نشان دهید.

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

۳ جدول زیر را با توجه به دامنه داده شده کامل کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$f(n)$	۱	۴	۱	۵	۹	۲	۶	۵	۳	۵

مسائل

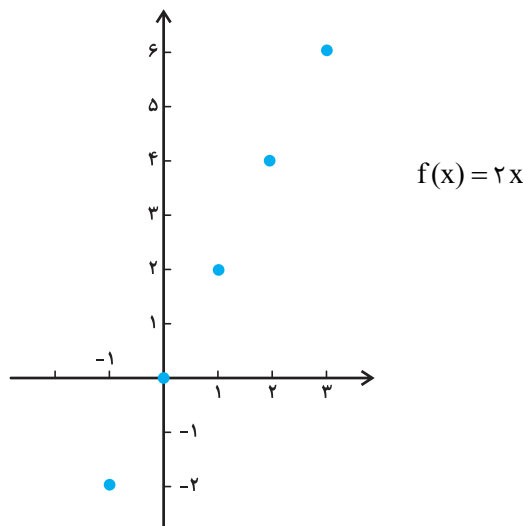
۱ هر یک از جدول‌های زیر نمایش یک تابع با دامنه $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد. نمودار هر یک را در صفحه مختصات رسم کنید. در

صورت امکان، قانون تابع را بنویسید.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۲	۰	۲	۴	۶

الف)

در واقع عرض هر نقطه دو برابر طول آن است طبق جدول بالا

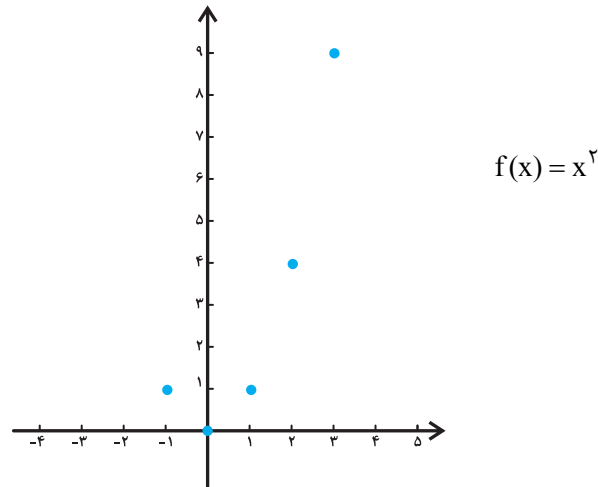




ب)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰	۱	۴	۹

اگر به نمودار دقت کنید متوجه می‌شوید عرض هر نقطه از توان دوم طول آن به دست می‌آید.



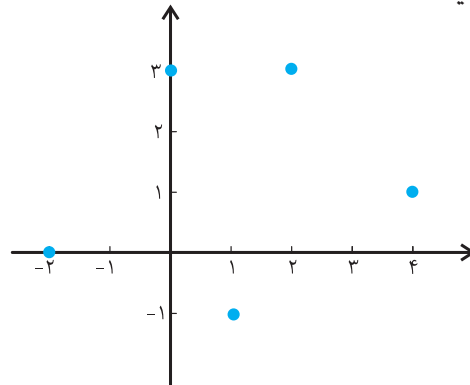
۲ نمایش جدول تابع f با دامنه $\{-2, 0, 1, 2, 4\}$ به صورت زیر است:

x	-۲	۰	۱	۲	۴
f(x)	۰	۳	-۱	۳	۱

الف) مقادیر $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(4)$ را بیابید.

$$f(0) = 3, \quad f(1) = -1, \quad f(4) = 1$$

ب) نمودار f را در صفحه مختصات رسم کنید.



۳ نمودار تابع g به صورت رو به رو است:

الف) با توجه به شکل، دامنه g را بنویسید.

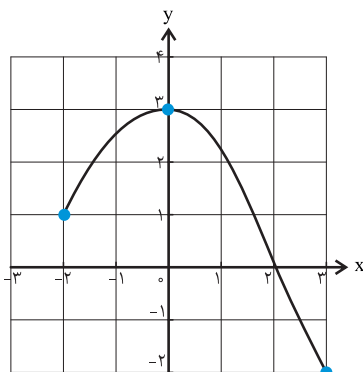
ب) $g(2)$ ، $g(-2)$ و $g(0)$ را به دست آورید.

$$D_g = [-2, 2]$$

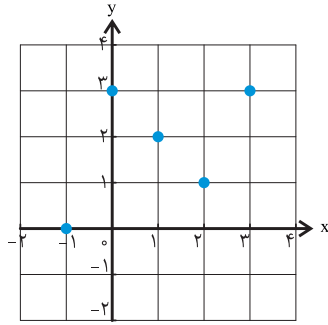
$$g(-2) = 1, \quad g(0) = 3, \quad g(2) = 0$$

پ) آیا $g(4)$ معنایی دارد؟ چرا؟

خیر. زیرا ۴ در دامنه تابع واقع نیست.

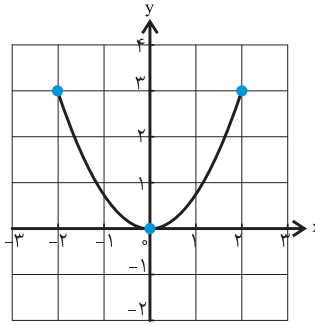


۴ سه تابع زیر را در نظر بگیرید. دامنه هر یک از این تابع‌ها را بنویسید.



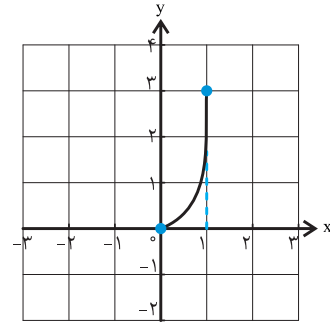
الف

$$D = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$



ب

$$D = [-2, 2]$$

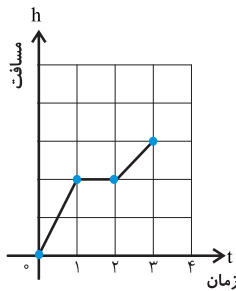


پ

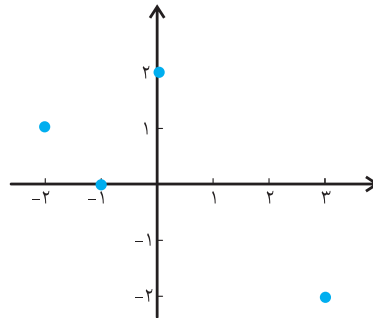
$$D = [0, 1]$$

۵ وضعیتی از زندگی روزمره را بنویسید که نمودار رو به رو نشان‌دهنده آن وضعیت باشد.

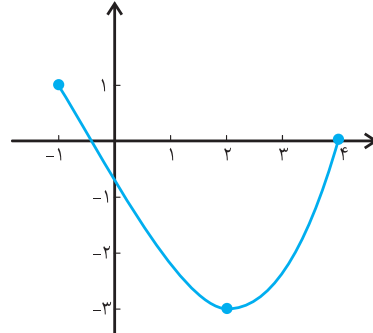
فرض کنیم هنگام سفر پس از یک ساعت طی مسیر به مدت یک ساعت استراحت و مجدداً یک ساعت دیگر رانندگی کرده‌ایم.



۶ تابع g با دامنه $\{-2, -1, 0, 3\}$ را طوری رسم کنید که $g(0) = 2$ و $g(-2) = 1$.



۷ تابع دلخواه f با دامنه $[-1, 4]$ را طوری رسم کنید که $f(-1) = 1$ و $f(2) = -3$.



۸ تابع h با دامنه $[0, 3]$ و قانون $h(x) = 3x^2 + a$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار a را طوری بیابید که $h(1) = 2$.

$$h(1) = 3(1)^2 + a = 2 \Rightarrow 3 + a = 2 \Rightarrow a = 2 - 3 \Rightarrow a = -1$$

ب) $h(2)$ را بیابید.

$$h(x) = 3x^2 - 1, \quad h(2) = 3(2)^2 - 1 = 12 - 1 = 11$$

پ) آیا $h(4)$ معنایی دارد؟ چرا؟

خیر. زیرا ۴ در دامنه تابع واقع نیست.

پرونده دوم تابع‌های خطی و درجه دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

تابع‌های خطی

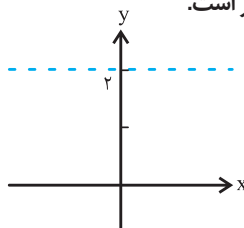
تابع‌هایی که قانون آنها به صورت $f(x) = ax + b$ یا $y = ax + b$ باشد که در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند را تابع خطی گویند.
مثال: توابع $y = 3x - 5$ و $y = -2x + 1$ و $y = \frac{2}{5}x$ و $y = \sqrt{x}$ خطی‌اند ولی توابع $y = x^2 - 1$ و $y = \frac{1}{x}$ و $y = \sqrt{x}$ خطی نیستند.

نکته‌ها:

- * دامنه توابع خطی می‌تواند R یا هر زیر مجموعه‌ای از R باشد. اگر دامنه تابع خطی R باشد آنگاه نمودارش به صورت خط راست است.
- * در تابع خطی $y = ax + b$ ، ضریب a یا شیب خط است و در این تابع به ازای هر یک واحد افزایش متغیر (یعنی x)، مقدار تابع یا y به اندازه a واحد تغییر می‌کند، اگر $a > 0$ باشد y افزایش یافته و اگر $a < 0$ باشد y کاهش می‌یابد. به عبارتی دیگر اگر $a > 0$ باشد تابع افزایشی (صعودی) و اگر $a < 0$ باشد تابع کاهشی (نزولی) است.

مثال: در تابع خطی $y = 2 - 3x$ شیب خط (-3) است و به ازای هر یک واحد افزایش متغیر، مقدار تابع یا y به اندازه ۳ واحد کاهش می‌یابد.
تابع ثابت: تابعی‌هایی که فقط یک مقدار داشته باشند را تابع ثابت می‌نامند و قانون تابع ثابت f به صورت $f(x) = c$ است که c یک عدد ثابت است. نمودار این تابع با دامنه R به صورت یک خط موازی محور x ‌هاست.

مثال: تابع $y = 2$ تابعی ثابت است و نمودارش به صورت زیر است.

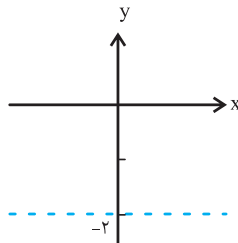


مثال: مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x) = ax + 3x - 2$ یک تابع ثابت باشد و سپس مقدار $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

حل:

$$f(x) = (a + 3)x - 2 \Rightarrow \text{ضریب } x = 0 \Rightarrow a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow f(x) = -2$$

$$f(0) = -2, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = -2$$



نمودار f به صورت زیر می‌باشد.

تذکر: تابع ثابت یک نوع ساده از تابع خطی است که شیب آن صفر است.

مثال: کدامیک از جدول‌های زیر می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد.

الف)

x	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	۵	۹	۱۳	۱۷

حل: تابع خطی است زیرا به ازای هر یک واحد افزایش x ، $f(x)$ یا مقدار تابع به اندازه ثابت ۴ افزایش می‌یابد. شیب این خط ۴ می‌باشد.

ب)

x	-۱	۰	۱	۲
$g(x)$	۵	۲	-۱	-۴

حل: تابع خطی است. زیرا به ازای هر یک واحد افزایش x ، $g(x)$ یا مقدار تابع به اندازه ثابت ۳ کاهش می‌یابد، شیب خط -۳ است.

ج)

x	۱	۲	۳	۴
$h(x)$	۵	۳	۳	۰

حل: تابع خطی نیست. چون به ازای هر یک واحد افزایش x ، مقدار تابع به اندازه ثابتی افزایش یا کاهش پیدا نکرده بلکه تغییرات ۲ واحد و ۳ واحد می‌باشد یعنی تغییرات ثابت نیست.

د)

x	۰	۱	۲	۴
y	۳	۳	۳	۳

حل: تابع خطی است. زیرا به ازای هر یک واحد افزایش مقدار تابع تغییری نکرده بلکه ثابت مانده است این تابع یک تابع ثابت است.

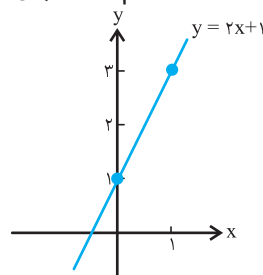
نکته‌ها:

- * در تابع خطی $y = ax + b$ با ثابت ماندن a و تغییر b نمودار تابع خط‌هایی موازی یکدیگرند، اگر b بزرگ شود این خط به موازات خود به پایین منتقل می‌شود و با صفر شدن b خط از مبدأ می‌گذرد. یعنی نمودار توابع با ضابطه ax از مبدأ می‌گذرند.
- * در تابع خطی $y = ax + b$ با ثابت ماندن b و تغییر a ، خط‌هایی به دست می‌آیند که شیب‌های مختلفی دارند ولی همگی از یک نقطه ثابت $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ می‌گذرند. یعنی این خط‌ها محور عرض‌ها را در b قطع می‌کنند به عبارتی دیگر عرض از مبدأ تمام این خطوط b است.

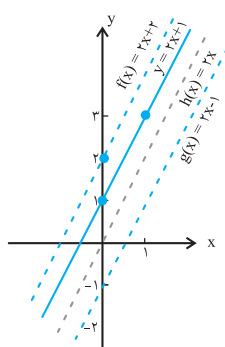
مثال: ابتدا نمودار $y = 2x + 1$ را رسم کنید. سپس به کمک انتقال نمودار توابع $f(x) = 2x + 2$ و $g(x) = 2x - 1$ و $h(x) = 2x$ را رسم کنید.

$$y = 2x + 1$$

x	0	1
y	1	3



حل:



حال برای رسم $f(x) = 2x + 2$ کافی است خط $y = 2x + 1$ را به موازات خودش به اندازه یک واحد بالا ببریم و برای رسم $g(x) = 2x - 1$ کافی است خط $y = 2x + 1$ را به موازات خودش به اندازه ۲ واحد پایین ببریم و برای رسم $h(x) = 2x$ کافی است خطی موازی $y = 2x - 1$ رسم کنیم که از مبدأ بگذرد.

مثال: کلیه خطوط $y = ax + 5$ از چه نقطه مشترکی می‌گذرند؟

حل: به جای x عدد صفر را می‌گذاریم، $y = 5$ به دست می‌آید بنابراین این خطوط همگی از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌گذرند.

مثال: قانون یک تابع خطی f را بنویسید که از مبدأ مختصات و نقطه $(2, 3)$ و $(3, 2)$ می‌گذرد و سپس مقدار $f(5)$ را بیابید.

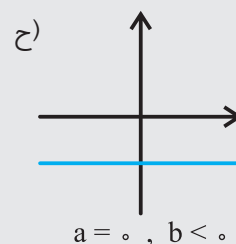
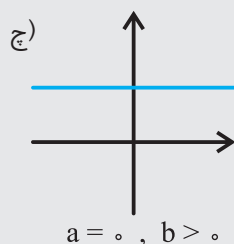
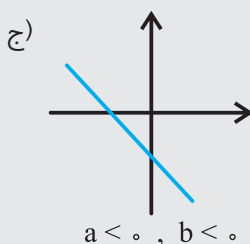
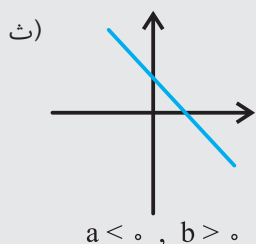
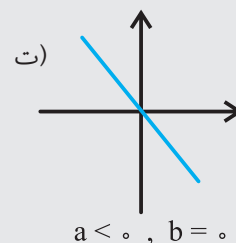
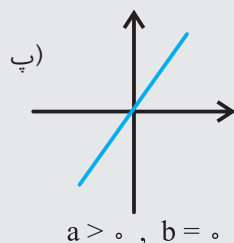
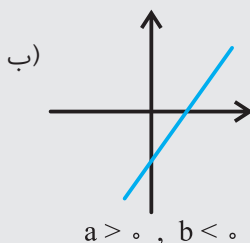
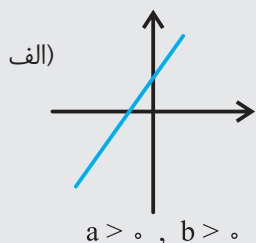
حل: چون تابع f خطی است و از مبدأ مختصات می‌گذرد پس معادله‌اش به صورت $f(x) = ax$ است و چون از نقطه $(2, 3)$ و $(3, 2)$ می‌گذرد پس داریم:

$$f(2) = 3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(3) = 2 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

بنابراین قانون f به صورت $f(x) = \frac{2}{3}x$ است.

نکته: نمودار تابع خطی $y = ax + b$ به ازای مقادیر مختلفی از a و b به صورت‌های زیر است.

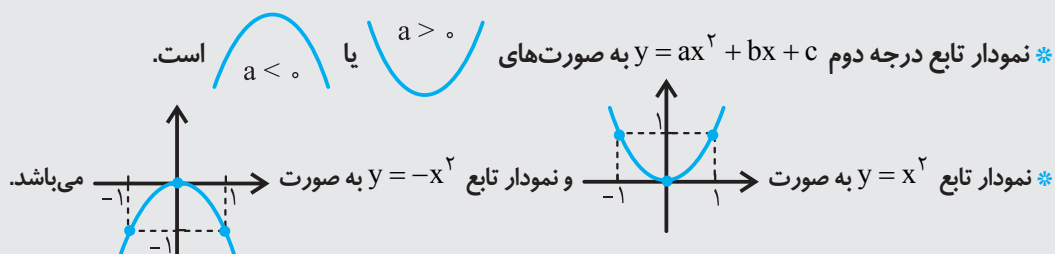


تابع‌های درجه دوم

تابع‌هایی که قانون آن‌ها به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد که در آن a و b و c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ باشد تابع درجه دوم نامیده می‌شوند. دامنه این توابع می‌توانند R یا هر زیر مجموعه‌ای از R باشند.

مثال: توابع $y = -x^2 + 3x - 1$ ، $y = 5x^2 - 1$ ، $y = x^2 + 4x$ ، $y = \frac{1}{3}x^2$ درجه دوم می‌باشند.

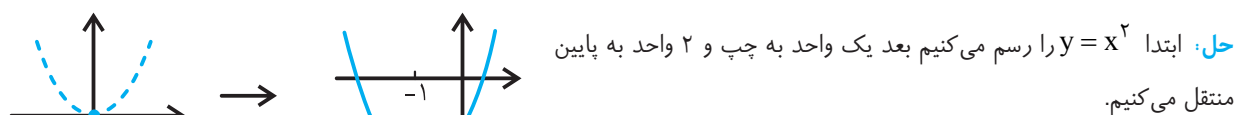
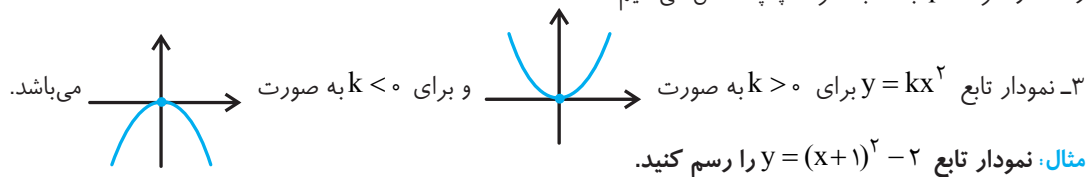
نکته‌ها:



رسم تابع درجه دوم به کمک انتقال:

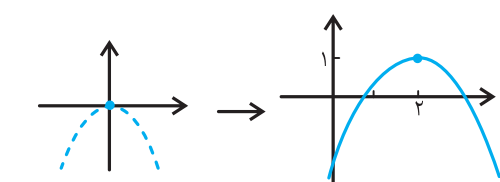
۱- برای رسم نمودار تابع $y = x^2 + p$ کافیست نمودار $y = x^2$ را رسم کرده و سپس P واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم اگر $P > 0$ باشد به بالا و اگر $P < 0$ باشد به پایین منتقل می‌شود.

۲- برای رسم نمودار تابع $y = (x - q)^2$ کافی است، نمودار $y = x^2$ را q واحد به طرف راست یا چپ منتقل کنیم اگر $q > 0$ باشد به طرف راست و اگر $q < 0$ باشد به طرف چپ منتقل می‌کنیم.

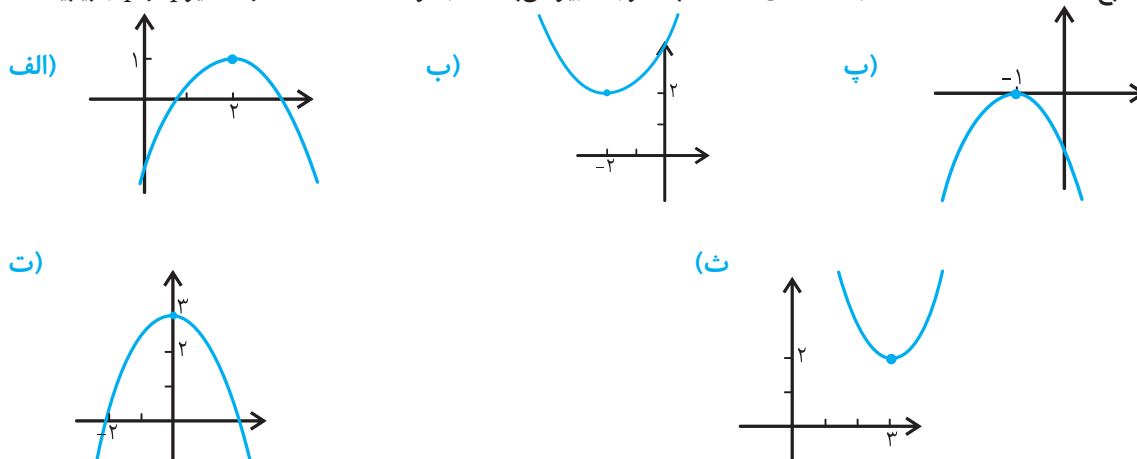


مثال: نمودار $y = -(x - 2)^2 + 1$ را رسم کنید.

ابتدا $y = -x^2$ را رسم می‌کنیم بعد ۲ واحد به راست و یک واحد بالا می‌بریم.



مثال: نمودار تابع $y = k(x - q)^2 + P$ در حالت‌های مختلف به صورت زیر می‌باشد در هر حالت علامت k و مقادیر q و P را بیابید.



حل: الف) چون دهانه نمودار به سمت پایین است پس $k < 0$.

این شکل نشان می‌دهد که نمودار $y = kx^2$ ، ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به بالا منتقل شده است پس $q = 2$ و $P = 1$.

ب) چون دهانه رو به بالاست پس $k > 0$.

این شکل بیانگر اینست که نمودار $y = kx^2$ دو واحد به چپ و ۲ واحد به بالا منتقل شده است. پس $q = -2$ و $P = 2$ است.

پ) چون دهانه پایین است پس $k < 0$ است و چون نمودار $y = kx^2$ یک واحد به چپ منتقل شده است. ولی هیچ واحد بالا یا پایین نرفته است پس $P = 0$ و $q = -1$.

ت) $k < 0$ است و نمودار $y = kx^2$ فقط ۳ واحد بالا رفته است ولی به چپ یا راست منتقل نشده است پس $P = 3$ و $q = 0$.

ث) $k > 0$ و چون نمودار $y = kx^2$ ، ۳ واحد به راست و ۲ واحد به بالا منتقل شده است پس: $P = 2$, $q = 3$.

نکته:

فرمول تبدیل به مربع کامل:

$$\begin{cases} (1) x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ (2) x^2 - bx = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{cases}$$

مثال: عبارت‌های زیر را به مربع کامل تبدیل کنید.

الف) $x^2 - 6x = \left(x - \frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = (x - 3)^2 - 9$

ب) $x^2 + 5x + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$

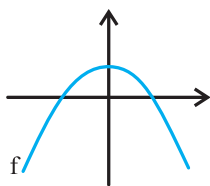
کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها

برای حل معادله‌هایی که به شکل $f(x) = 0$ می‌باشند، ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم محل برخورد نمودار با محور x ها (در صورت وجود) جواب‌های معادله $f(x) = 0$ است.

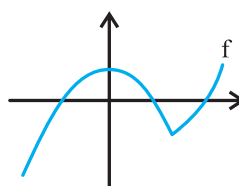
اگر نمودار f محور x ها را قطع نکند آن‌گاه معادله $f(x) = 0$ جواب ندارد.

مثال: در شکل‌های زیر تعداد جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را مشخص کنید و علامت جوابها را مشخص کنید.

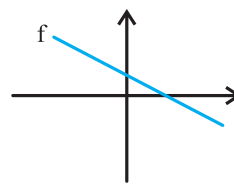
الف)



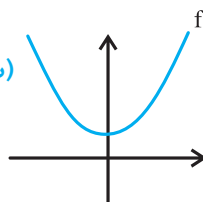
ب)



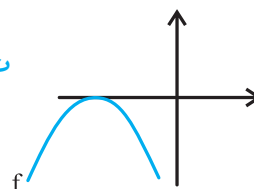
پ)



ت)



ث)



حل: الف) چون نمودار در ۲ نقطه محور x ها را قطع کرد پس معادله $f(x) = 0$ دارای ۲ جواب است که یک جواب مثبت و یک جواب دیگر منفی است چون یکبار در قسمت مثبت محور x ها، و یکبار در قسمت منفی محور x ها را قطع کرده است.

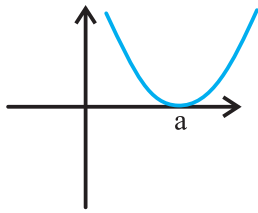
ب) نمودار محور x ها را در ۳ نقطه قطع کرده است بنابراین معادله $f(x) = 0$ دارای سه جواب است.

و چون قسمت مثبت محور x ها را در ۲ نقطه قطع کرده ۲ جواب مثبت دارد و در یک نقطه در قسمت منفی محور x ها، محور را قطع کرده پس یک جواب منفی است.

پ) این نمودار محور x ها را فقط در یک نقطه قطع کرده و آن هم در قسمت مثبت محور x ها است پس معادله $f(x) = 0$ فقط یک جواب مثبت دارد.

ت) نمودار محور x ها را قطع نکرده پس معادله $f(x) = 0$ جواب ندارد.

ث) چون نمودار در یک نقطه در قسمت منفی‌ها بر محور x ها مماس است پس معادله $f(x) = 0$ یک جواب دارد که به آن ریشه مضاعف نیز می‌گویند.



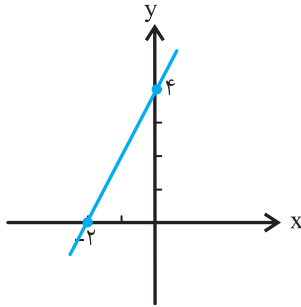
تذکر مهم: وقتی نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a بر محور x مماس باشد به $x = a$ ریشه مضاعف معادله $f(x) = 0$ گویند.

مثال: معادلات زیر را به کمک رسم نمودار حل کنید.

حل:

الف) $2x + 4 = 0$

x	0	-2
y	4	0

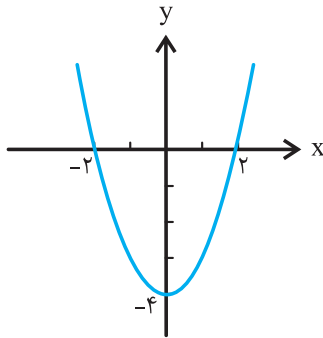


ابتدا نمودار $y = 2x + 4$ را رسم می‌کنیم.

نمودار محور x ها را در -2 قطع کرده است پس معادله یک جواب دارد و

جواب آن $x = -2$ است.

ب) $x^2 + 1 = 5$



ابتدا تمام جملات را سمت چپ تساوی می‌بریم که طرف دیگر صفر شود.

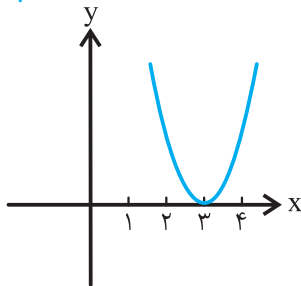
$$x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 + 1 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

حال نمودار $y = x^2 - 4$ را رسم می‌کنیم، برای رسم کافی است نمودار $y = x^2$ را ۴ واحد به

پایین منتقل کنیم. چون نمودار در ۲ نقطه محور x ها را قطع کرده است پس این معادله ۲ جواب

دارد مطابق شکل جواب‌ها عبارتند از: $x = -2$ و $x = 2$

پ) $x^2 - 6x + 8 = -1$



ابتدا تمام جملات را یک طرف تساوی می‌بریم:

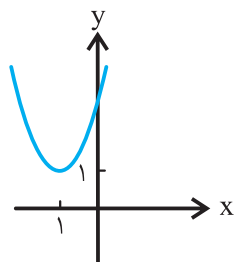
$$x^2 - 6x + 8 = -1 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$$

حال نمودار $y = (x - 3)^2$ را رسم می‌کنیم برای رسم آن کافی است نمودار $y = x^2$ را ۳ واحد به طرف راست منتقل کنیم.

مطابق شکل می‌بینیم که این معادله دارای یک جواب است و جواب آن $x = 3$ است و چون در

این نقطه بر محور x ها مماس است $x = 3$ ریشه مضاعف معادله است.

ت) $x^2 + 2x = -2$



$$x^2 + 2x = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{تبدیل مربع کامل}} (x + 1)^2 + 1 = 0$$

نمودار $y = (x + 1)^2 + 1$ را رسم می‌کنیم برای این کار کافی است نمودار $y = x^2$ را یک واحد

به چپ و یک واحد بالا ببریم:

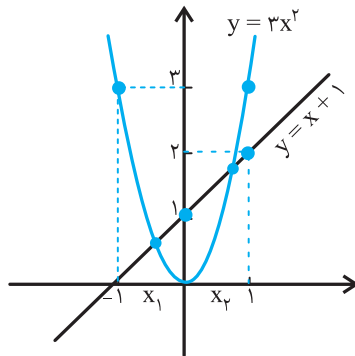
چون نمودار محور x ها را قطع نکرده پس این معادله جواب ندارد.

نکته: برای حل معادله $f(x) = g(x)$ ، کافی است نمودارهای f و g را رسم کنیم و محل تقاطع دو نمودار را مشخص کنیم،

طول نقاط تقاطع جواب معادله $f(x) = g(x)$ می‌باشد.

مثال: معادله $3x^2 = x + 1$ چند جواب دارد؟

حل: ابتدا نمودار توابع $f(x) = 3x^2$ و $g(x) = x + 1$ را رسم می‌کنیم.



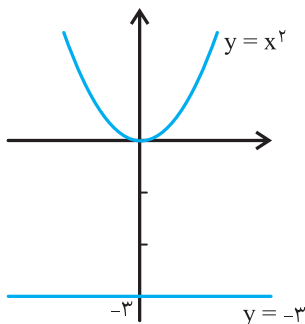
$$y = 3x^2 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 3 & 0 & 3 \end{array}$$

$$y = x + 1 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$$

چون ۲ نمودار در ۲ نقطه متقاطع‌اند پس این معادله ۲ جواب دارد. که یکی مثبت و دیگری منفی است.

مثال: معادله $x^2 + 1 = -2$ چند جواب دارد؟

حل:



$$x^2 + 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -3$$

حال نمودار توابع $y = x^2$ و $y = -3$ را رسم می‌کنیم.

چون دو نمودار همدیگر را قطع نمی‌کنند پس این معادله جواب ندارد.

کاربرد تابع‌ها در حل نامعادله‌ها

نامساوی‌های به صورت $ax + b \leq 0$ یا $ax + b \geq 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است را نامعادله درجه اول گویند و نامساوی‌های به صورت $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است را نامعادله درجه دوم گویند. مقادیری از x که نامعادله را به یک نامساوی درست تبدیل کند، جواب‌های نامعادله گویند.

مثال: نامعادله $2x + 3 \leq 0$ درجه اول و نامعادله $3x^2 - 4x + 1 \geq 0$ درجه دوم می‌باشد.

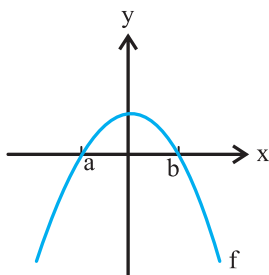
روش حل نامعادله به روش هندسی (یا ترسیم):

برای حل نامعادله $f(x) > 0$ که f یک تابع است، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس آن قسمت از نمودار تابع را که در بالای محور x هاست مشخص می‌کنیم. آن x هایی از دامنه f که به ازای آن‌ها، نمودار تابع f بالای محور x ها است، مجموعه جواب نامعادله $f(x) > 0$ است. به طور مشابه برای حل نامعادله $f(x) < 0$ پس از رسم f آن قسمتی از نمودار که پایین محور x هاست را در نظر می‌گیریم. آن x هایی از دامنه f که به ازای آن‌ها نمودار تابع پایین محور x هاست مجموعه جواب نامعادله $f(x) < 0$ است.

تذکر: مجموعه جواب نامعادله‌هایی به صورت $f(x) \geq 0$ (یا $f(x) \leq 0$) علاوه بر مجموعه جواب‌های نامعادله $f(x) > 0$ (یا $f(x) < 0$)، طول نقاط برخورد تابع با محور x ها را هم شامل می‌شود.

نکته:

برای یافتن طول نقاط برخورد تابع f با محور x ها، به جای y یا $f(x)$ صفر قرار می‌دهیم و x را می‌یابیم.



مثال: مطابق شکل نمودار تابع f داده شده است.

(الف) جواب نامعادله $f(x) > 0$ را مشخص کنید.

تابع f در بازه (a, b) بالای محور x هاست بنابراین مجموعه جواب نامعادله بازه (a, b) است.

(ب) جواب نامعادله $f(x) \geq 0$ را مشخص کنید.

جواب نامعادله $f(x) \geq 0$ بازه بسته $[a, b]$ است.

(پ) جواب نامعادله $f(x) < 0$ را مشخص کنید.

تابع f در بازه‌های $(-\infty, a)$ و $(b, +\infty)$ پایین محور x هاست بنابراین مجموعه جواب نامعادله $f(x) < 0$ برابر است با:

$$(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

(ت) جواب نامعادله $f(x) \leq 0$ را مشخص کنید.

جواب نامعادله $f(x) \leq 0$ برابر است با:

$$(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$$

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید. (با رسم نمودار)

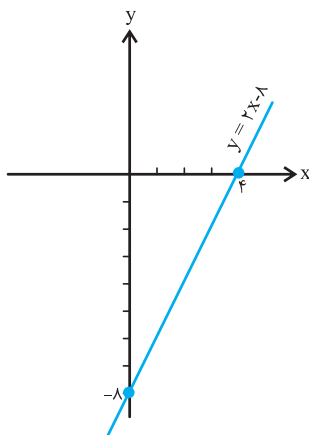
(الف) $3x - 2 < x + 6$

حل: ابتدا تمام جملات را به یکطرف نامساوی می‌بریم طوری که طرف دیگر صفر شود.

$$3x - 2 < x + 6 \Rightarrow 3x - x - 2 - 6 < 0 \Rightarrow 2x - 8 < 0$$

حال نمودار $f(x) = 2x - 8$ را رسم می‌کنیم:

x	0	4
y	-8	0



این خط محور طول‌ها را در $x = 4$ قطع می‌کند و در بازه $(-\infty, 4)$ پایین

محور x هاست، پس مجموعه جواب نامعادله $2x - 8 < 0$ عبارت است از

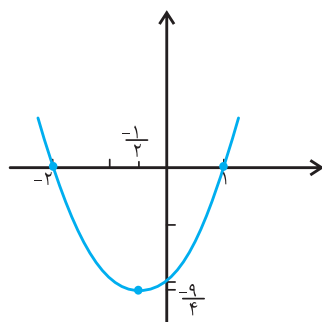
بازه $(-\infty, 4)$

(ب) $x^2 + x \geq 2$

حل: ابتدا نامعادله را به صورت $x^2 + x - 2 \geq 0$ می‌نویسیم، سپس نمودار $y = x^2 + x - 2$ را رسم می‌کنیم، آن قسمتی از نمودار که بالای

محور x هاست و محور x ها را قطع می‌کند در نظر می‌گیریم.

$$y = x^2 + x - 2 \quad \text{مربع کامل:} \quad (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow y = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$



حال باید نقطه برخورد تابع $y = x^2 + x - 2$ را با محور x ها بیابیم، برای این کار جای y صفر می‌گذاریم:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0, x - 1 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

نمودار این تابع در بازه‌های $(-\infty, -2)$ و $(1, +\infty)$ بالای محور x هاست و در $x = -2$ و $x = 1$

محور x ها را قطع می‌کند بنابراین مجموعه جواب نامعادله $x^2 + x - 2 \geq 0$ عبارتست از:

$$(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

فعالیت ۱



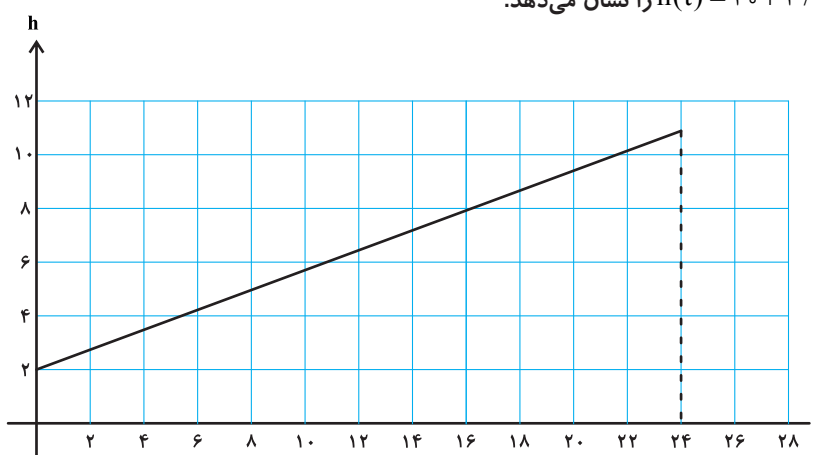
نوعی بامبو پس از آن که به ارتفاع ۲۰ سانتیمتر رسید، به طور تقریبی در هر ساعت $\frac{3}{8}$ سانتی متر رشد می کند. ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر ارتفاع بامبو را (برحسب سانتیمتر) پس از t ساعت با $h(t)$ نشان دهیم داریم: $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$.

اگر رشد بامبو را در یک شبانه روز در نظر بگیریم، دامنه این تابع $[0, 24]$ خواهد بود.

۱ جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع ها بنویسید.

t (برحسب ساعت)	h (برحسب سانتی متر)
۰	$20 + \frac{3}{8} \times 0 = 20$
۱	$20 + \frac{3}{8} \times 1 = 23/8$
۲	$20 + \frac{3}{8} \times 2 = 27/6$
۳	$20 + \frac{3}{8} \times 3 = 31/4$
۴	$20 + \frac{3}{8} \times 4 = 35/2$

نمودار زیر، نمودار تابع $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$ را نشان می دهد.



۲ به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t مقدار h چه تغییری می کند؟

به ازای افزایش یک واحد مقدار t مقدار h به $\frac{3}{8}$ اضافه می شود.

۳ رابطه بین دو کمیت h و t از چه نوع (خطی / غیر خطی) است؟ چرا؟

از نوع خطی است زیرا خطی که از هر دو نقطه بگذرد از بقیه نقاط نیز می گذرد یا به عبارت دیگر معادله ی آن به فرم $f(x) = ax + b$ است که a و b عدد هستند پس معادله یک خط است و شیب این خط $\frac{3}{8}$ است و دامنه تعریف آن از ۰ تا بی نهایت است.

۴ $h(2)$ چه چیزی را نشان می دهد؟ $h(18)$ چه طور؟

$h(2)$ یعنی میزان ارتفاع بامبو در ساعت دوم و $h(18)$ یعنی میزان ارتفاع بامبو در ساعت هجدهم

۵ اگر $h(a) = 39$ ، a چه چیزی را نشان می دهد؟

$$h(a) = 39 \Rightarrow 39 = 20 + \frac{3}{8}a \Rightarrow 19 = \frac{3}{8}a \Rightarrow a = 5$$

یعنی در ساعت ۵ ارتفاع بامبو به ۳۹ سانتیمتر می رسد.



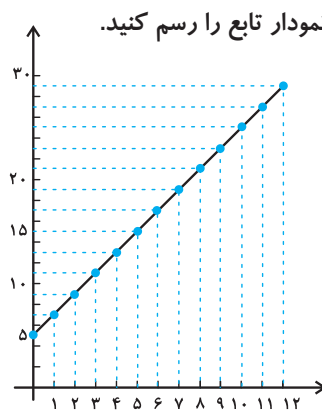
کار در کلاس ۱

رضا علاقه زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه به طور جدی ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

۱ رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشته است؟ در آخر ماه پنجم چطور؟
۵ طرح داشت و چون تصمیم گرفته در هر ماه ۲ طرح ارائه کند می‌توان گفت در پایان ماه اول $5 + 2 = 7$ طرح خواهد داشت و در پایان ماه پنجم $5 + 2 \times 5 = 15$ طرح خواهد داشت.

۲ اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنه آن را بنویسید.
 $f(x) = 5 + 2x$, $f(12) = 5 + 2 \times 12 = 29 \Rightarrow D_f = [5, 29]$

۳ مقادیر $f(0)$, $f(10)$ را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(-1)$ معنایی دارد؟
 $f(0) = 5 + 2 \times 0 = 5$ یعنی در لحظه شروع رضا ۵ طرح داشته است.
 $f(10) = 5 + 2 \times 10 = 25$ یعنی رضا در ماه دهم ۲۵ طرح دارد.
و همچنین $f(-1)$ تعریف نشده است زیرا ماه (-1) معنایی ندارد.



۵ اگر $f(a) = 17$ مقدار a را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید.
 $f(x) = 17 \Rightarrow 5 + 2a = 17 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$
یعنی در ماه ششم، ۱۷ طرح ارائه کرده است.



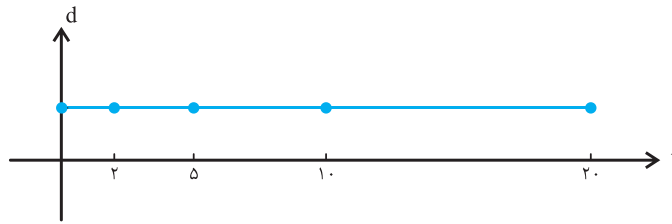
فعالیت ۲

خودرویی از نقطه A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۲۰ ثانیه است.
۱ مقدار مسافت طی شده به وسیله خودرو از نقطه A، پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟
چون چراغ سبز نشده است در ثانیه ۲ و ۵ نیز همان ۲ کیلومتر را طی کرده است یعنی در ثانیه دوم و پنجم مسافت طی شده وسیله نقلیه از نقطه A، ۲ کیلومتر است.

۲ جدول مقابل را کامل کنید.

t (زمان توقف بر حسب ثانیه)	d (مسافت طی شده بر حسب کیلومتر)
۰	۲ km
۲	۲ km
۵	۲ km
۱۰	۲ km
۲۰	۲ km

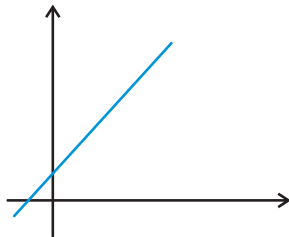
۳ نمودار تابع را از زمان $t=0$ تا زمان $t=20$ رسم کنید.



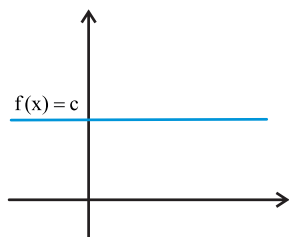
۴ با تغییر زمان (t)، مسافت طی شده (d) چه تغییری می‌کند؟
در $0 \leq t \leq 20$ مسافت همان ۲km ثابت است.

کار در کلاس ۲

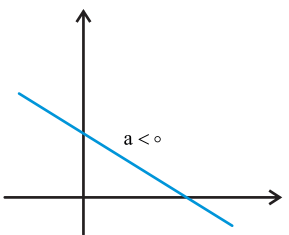
۱ نمودارهای زیر چند تابع خطی را نشان می‌دهند. مشخص کنید کدام نمودار مربوط به تابع ثابت است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



الف) تابع خطی است با شیب مثبت (صعودی) و معادله آن $f(x) = ax + b$ است و

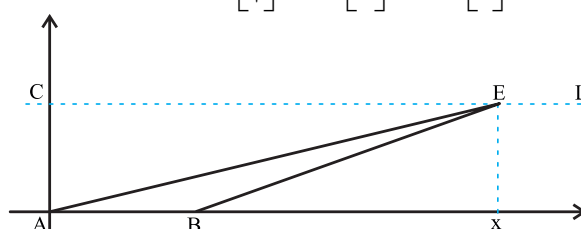


ب) تابع خطی ثابت می‌باشد یعنی به ازای هر مقداری از دامنه تابع مقدار ثابت دارد.



پ) تابع خطی می‌باشد با شیب منفی (نزولی) و معادله آن به صورت $f(x) = ax + b$ است که $a < 0$ است.

۲ در صفحه مختصات زیر، مثلث با رئوس $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ رسم کنید.



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
S(x)	۳	۳	۳	۳	۳

الف) در جدول رو به رو، x طول نقطه‌ای از خط L (مانند E) است و S (تابعی از x) مساحت مثلث ABE است. جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

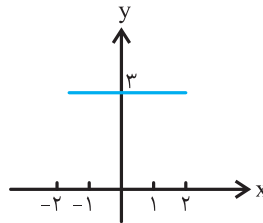
مساحت مثلث ABE هرگاه $x = ۲, ۱, ۰, -۱$ و $x = -۲$ باشد برابر ۳ است.

ب) قانون این تابع را بنویسید و توضیح دهید چرا S تابعی خطی از x است؟

$$S(x) = ۳$$

$S(x)$ تابعی ثابت است و نمودار آن یک خط است با شیب صفر.

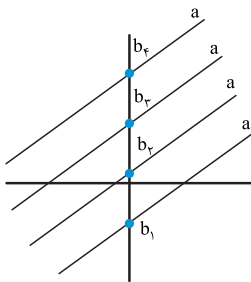
پ) با استفاده از جدول، نمودار تابع را رسم کنید.



فعالیت ۳

تابع خطی $f(x) = ax + b$ را در نظر بگیرید. با استفاده از جنوجبرا مطابق دستورالعمل صفحه ۴۳، دو لغزنده برای a و b در نظر بگیرید.

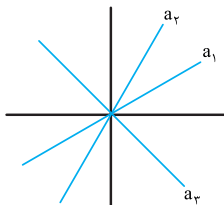
۱) با ثابت نگه داشتن a و تغییر مقادیر b ، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟



با تغییر مقدار b و ثابت نگه داشتن (ax) خط‌های موازی با یکدیگر ایجاد می‌کند می‌توان گفت تابع به صورت عمودی جابه‌جا می‌شود. در واقع مقدار عرض از مبدأ یا همان b تغییر می‌کند. به طور مثال در شکل رو به رو

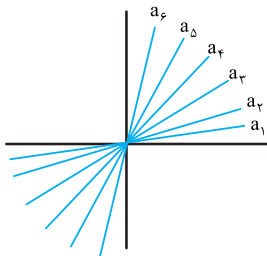
$$b_4 > b_3 > b_2 > b_1$$

۲) با ثابت نگه داشتن b ، به ازای مقادیر مختلف a ، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟

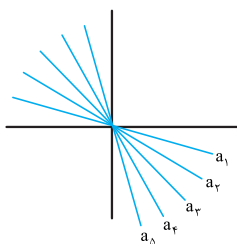


با ثابت نگه داشتن مقدار b اگر a تغییر کند در واقع شیب خط عوض می‌شود که در شکل رو به رو $a_2 > a_1$ و $a_3 < a_2$ است.

۳) اگر a مثبت باشد، زاویه خط با جهت محور طول‌ها چگونه است؟ اگر a منفی باشد، زاویه خط با جهت محور طول‌ها چگونه است؟



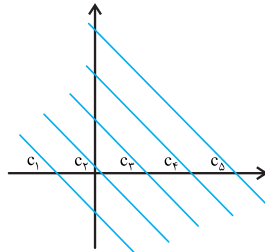
الف) اگر $a > 0$ باشد در این حالت شیب خط مثبت است و زاویه خط با محور آن بین 0° تا 90° است.



ب) اگر $a < 0$ باشد در این حالت شیب خط منفی است و زاویه خط با محور طول‌ها بین 0° تا 90° است.

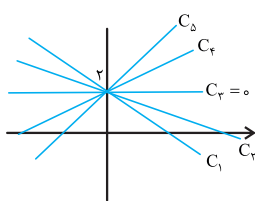


۱ وضعیت کلیه خط‌های به معادله $2y + 5x = c$ را به ازای مقادیر مختلف c ، توصیف کنید. شیب این خط‌ها چقدر است؟
 شیب خط $= \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = \frac{-5}{2} = -2.5$



در واقع بسته به میزان c خط‌های موازی با یکدیگر متفاوتی داریم که شیب تمام این خط‌ها برابر -2.5 است. در واقع به مقدار c مقدار طول از مبدأ گفته می‌شود.

۲ وضعیت کلیه خط‌های به معادله $2y + cx = 4$ را به ازای مقادیر مختلف c ، توصیف کنید. این خط‌ها از چه نقطه مشترکی می‌گذرند؟



$$\text{شیب خط} = \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = \frac{-c}{2}$$

پس می‌توان گفت c در شیب خط تأثیر می‌گذارد در واقع اگر $c > 0$ باشد شیب خط منفی می‌گردد اما اگر $c < 0$ باشد شیب خط مثبت می‌شود.

۳ آیا هر خطی در صفحه مختصات، نمودار یک تابع خطی است؟ چرا؟

بله. هر خطی بیانگر یک تابع خطی می‌باشد.

مسائل

۱ در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهار تابع داده شده است. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	5	-10	-25	-40

الف) نکته: خطی که از دو نقطه بگذرد باید از سایر نقاط نیز بگذرد لذا خط گذرنده از دو نقطه اول را به دست می‌آوریم و سپس سایر نقاط را چک می‌نماییم که مختصاتش در معادله صدق نماید.

ابتدا شیب خط را با دانستن دو نقطه به دست می‌آوریم.

$$\text{شیب خط دو نقطه‌ای} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10 - (5)}{-1 - (-2)} = \frac{-15}{-1} = 15$$

پس معادله خط را به دست می‌آوریم.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow \text{معادله خط: } y - 5 = 15(x + 2) \Rightarrow y - 5 = 15x + 30 \Rightarrow y + 15x = -25$$

حال می‌بایست نقاط دیگر در این معادله صدق نمایند یعنی اگر x را مثلاً برابر 0 قرار دهیم $g(x) = -25$ که صحیح است.

$$\text{قراردادن نقطه } \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \end{pmatrix} \text{ در تابع: (صدق می‌کند)} \quad -25 + 15 \times 0 = -25 \Rightarrow -25 = -25$$

$$\text{قراردادن نقطه } \begin{pmatrix} 1 \\ -40 \end{pmatrix} \text{ در تابع: (صدق می‌کند)} \quad -40 + 15 \times 1 = -25 \Rightarrow -25 = -25$$

تمام نقاط در این معادله صدق می‌کنند پس این نقاط می‌توانند تابع خطی را تشکیل دهند پس یک تابع خطی است.

ب) ابتدا شیب خط را با داشتن دو نقطه اول به دست می‌آوریم.

$$\text{شیب خط دو نقطه اول} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - (-8)}{-1 - (-2)} = \frac{7}{-1} = -7$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow \text{معادله خط: } y + 8 = -7(x + 2) \Rightarrow y - 7x = 6$$

حال می‌بایست سایر نقاط را در آن تست نمایم.

$$\text{قراردادن نقطه } \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ در تابع: (صدق نمی‌کند)} \quad 6 - 0 = 6 \neq 0$$

نقطه‌ی $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ در معادله خط صدق نمی‌کند پس می‌توان گفت این نقاط تشکیل خط نمی‌دهند پس یک تابع خطی نمی‌باشد.

ب) ابتدا شیب خط را با دانستن دو نقطه به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline k(x) & 1 & 3 & 5 & 7 \end{array} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} : \text{شیب خط دو نقطه اول} \Rightarrow \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

سپس معادله خط گذرنده از دو نقطه را به دست می‌آوریم.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow \text{معادله خط} : y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y - 2x = 1$$

حال بررسی می‌نماییم سایر نقاط در این معادله خط صدق می‌کند یا نه.

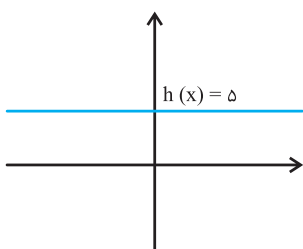
$$\text{قرار دادن نقطه } \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ در معادله : (صدق می‌نماید)} \quad 5 - 2 \times 2 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\text{قرار دادن نقطه } \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ در معادله : (صدق می‌نماید)} \quad 7 - 2 \times 3 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

پس می‌توان گفت این نقاط خط را تشکیل می‌دهند پس یک تابع خطی است.

ت)

x	-2	-1	0	1
h(x)	5	5	5	5



اگر به مقدار $h(x)$ توجه نمایید متوجه می‌شوید تابع خطی از نوع ثابت است و به ازای هر مقداری از

x ، مقدار $h(x) = 5$ است. پس یک تابع خطی است.

۲) علی در یک شرکت بیمه کار می‌کند او ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان به عنوان حقوق پایه دریافت می‌کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می‌کند، ۵۰,۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می‌شود.

الف) قانونی برای حقوق علی به عنوان تابعی از تعداد مشتری‌هایی که ماهانه جذب می‌کند بنویسید.

تعداد مشتری‌ها را x فرض می‌نماییم و میزان حقوق علی را $f(x)$

$$f(x) = 1,000,000 + 50,000x \quad f = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 0\}$$

ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید برای شرکت جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر خواهد بود؟

$$f(12) = 1,000,000 + 50,000 \times 12 = 1,600,000 \text{ تومان}$$

پ) چرا این تابع خطی است؟

زیرا اولاً دامنه تعریف آن مشخص می‌باشد. $x \geq 0$ و از طرفی هم در رابطه آن فرم $f(x) = ax + b$ که a و b هر دو عدد هستند پس به صورت تابع خطی می‌باشد.

ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

اگر ۲۰ مشتری جذب کند حقوق آن ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان می‌شود.

$$2,000,000 = 1,000,000 + 50,000x \Rightarrow 1,000,000 = 50,000x \Rightarrow x = \frac{1,000,000}{50,000} = 20$$

۳ آرمات سوار بر یک کشتی، در فاصله ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳ کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنه تابع مربوط به فاصله آرمات از ساحل (بر حسب کیلومتر) را بر حسب t (زمان بر حسب ساعت) بنویسید.

$$f(x) = 10 + 3x \quad f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

ب) آرمات پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

$$f(2) = 10 + 3 \times 2 = 10 + 6 = 16 \text{ km}$$

در فاصله ۱۶ کیلومتری قرار دارد.

پ) چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

تابع خطی است. زیرا اولاً که تابع است، ثانیاً فرم آن به صورت $f(x) = ax + b$ است که a و b نیز عدد هستند همچنین در مورد شیب این خط می‌توان گفت شیب آن مثبت است زیرا با افزایش x مقدار $f(x)$ افزایش یافته است و می‌توان گفت تابع صعودی است.

۴ دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما بر حسب درجه سانتی‌گراد)	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

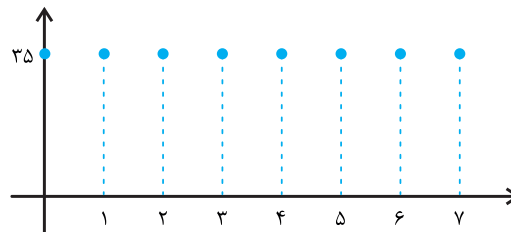
$$D_f = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 7\}, \quad f(x) = 35$$

تابع ثابت می‌باشد و مقدار آن برابر ۳۵ است.

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟

بله. یک تابع خطی ثابت است زیرا اولاً تابع خطی است چون فرم $f(x) = ax + b$ در آن رعایت شده و a و b عدد هستند پس تابع خطی است، از طرفی هم $a = 0$ است پس می‌توان گفت تابع خطی ثابت است.

ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.



۵ رابطه بین دو واحد اندازه‌گیری دما، درجه سانتی‌گراد (c) و درجه فارنهایت (F) با قانون $F(c) = \frac{9}{5}c + 32$ بیان می‌شود.

الف) مقدارهای $F(28)$ و $F(-40)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

$$f(c) = \frac{9}{5}c + 32, \quad f(28) = \frac{9}{5} \times 28 + 32 = 82 / ^\circ F, \quad f(-40) = \frac{9}{5} \times (-40) + 32 = -40 / ^\circ F$$

ب) دمای صفر درجه سانتی‌گراد، معادل چند درجه فارنهایت است؟

$$f(0) = \frac{9}{5} \times 0 + 32 = 32 / ^\circ F$$

پ) اگر $F(c) = 212$ ، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می‌دهد؟

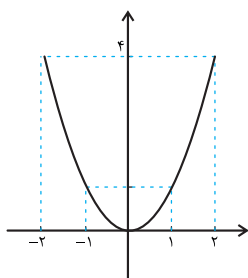
$$f(c) = 212 \Rightarrow \frac{9}{5}c + 32 = 212 \Rightarrow \frac{9}{5}c = 180 \Rightarrow c = 100$$

یعنی ۱۰۰ درجه سانتیگراد معادل ۲۱۲ فارنهایت است.

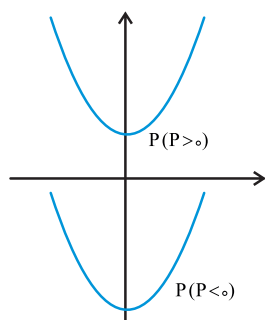


فعالیت ۴

به کمک جئوجبرا نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید).

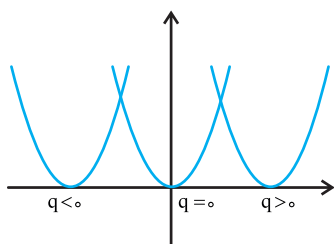


۱ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = x^2 + p$ را به ازای مقادیر مختلف p رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = x^2 + p$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.



نقطه P نقطه‌ایست که کمترین مقدار تابع در آنجاست که اگر مثبت باشد تابع بالای نمودار قرار دارد و اگر منفی باشد زیر نمودار قرار دارد.

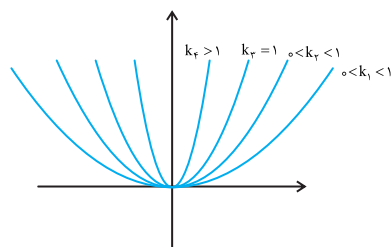
۲ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = (x - q)^2$ را به ازای مقادیر مختلف q رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = (x - q)^2$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.



در واقع تابع نمودار به ازای مقادیر مختلف q بر روی نمودار حرکت کرده و اگر $q > 0$ (مقداری مثبت باشد) به سمت راست و اگر $q < 0$ (مقداری منفی باشد) به سمت چپ محور شیفیت پیدا می‌کند.

۳ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = kx^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت و منفی برای k رسم کنید با تغییر علامت k از مثبت به منفی چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

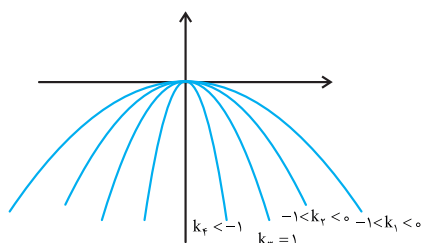
الف) $k > 0$



$$k_4 > k_3 > k_2 > k_1$$

رفتار این تابع به گونه‌ایست که هر چقدر k بزرگتر باشد نمودار جمع‌تر می‌شود به طور مثال $3x^2$ جمع‌تر از $2x^2$ است و چنانچه $0 < k < 1$ باشد هر چه مقدار k به صفر نزدیک‌تر می‌شود نمودار تابع بازتر می‌شود.

ب) $k < 0$

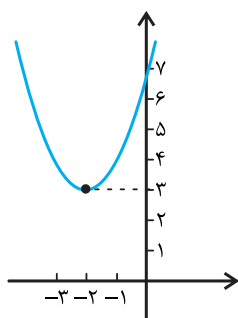


$$k_1 > k_2 > k_3 > k_4$$

رفتار این تابع در اعداد منفی به گونه‌ایست که هر چقدر k کوچکتر بشود تابع جمع‌تر می‌شود. به طور مثال $-3x^2$ جمع‌تر از $-2x^2$ است و چنانچه $-1 < k < 0$ باشد هر چقدر مقدار k بزرگتر بشود تابع بازتر می‌شود.



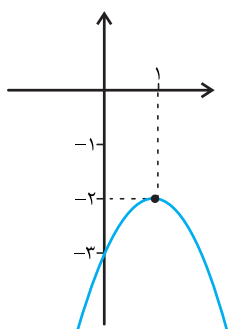
نمودارهای زیر مربوط به تابع درجه دوم $y = k(x-q)^2 + p$ می‌باشد، علامت k و مقدار p و q را تعیین کنید.



الف) نمودار تابع شبیه تابع $y = x^2$ است با این تفاوت که سه واحد به سمت بالا و ۲ واحد به سمت چپ شیفت پیدا کرده پس معادله تابع آن به صورت زیر است:

$$y = 1 \times (x - (-2))^2 + 3$$

$$k = 1, q = -2, p = 3$$



ب) نمودار تابع شبیه نمودار $y = -x^2$ است با این تفاوت که اولاً قرینه شده است در ثانی ۲ واحد به پایین و یک واحد به سمت راست شیفت پیدا کرده است. پس $q = 1$ و $P = -2$ و $k = -1$

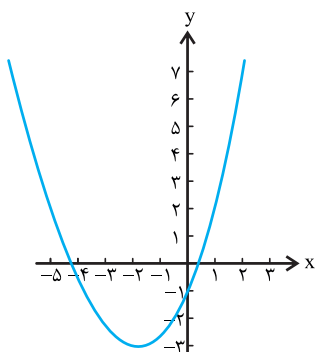
$$y = -1(x - 1)^2 - 2$$

$$k = -1, q = 1, P = -2$$

مسائل



۱ نمودارهای زیر مربوط به تابع درجه دوم، $y = k(x-q)^2 + p$ هستند، علامت k و مقدار q ، p را تعیین کنید.



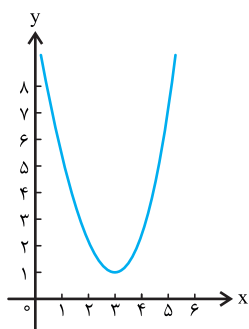
الف) نمودار شبیه نمودار تابع $y = x^2$ است. با این تفاوت که ۲ واحد به سمت چپ و سه واحد به سمت پایین کشیده شده است پس $q = -2$ و $p = -3$

$$y = k(x - (-2))^2 - 3 \Rightarrow y = k(x + 2)^2 - 3$$

چون تابع از نقطه $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ می‌گذرد پس می‌بایست این نقطه در آن صدق نماید پس:

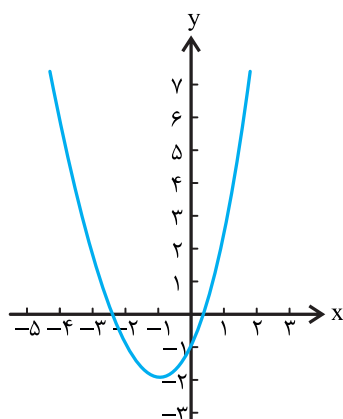
$$-1 = k(0 + 2)^2 - 3 \Rightarrow 2 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{2}, q = -2, P = -3$$



ب) نمودار شبیه نمودار تابع $y = x^2$ است که ۳ واحد به راست و ۱ واحد به سمت بالا کشیده شده است. پس $k = 1$ و $P = 1$ و $q = 3$ است.

۲ نمودار زیر مربوط به یک تابع درجه دوم است. مشخص کنید که کدام قانون، مربوط به این نمودار است؟



الف) $f(x) = (x-1)^2 + 1$

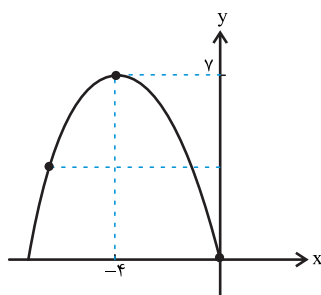
ب) $f(x) = (x-1)^2 - 1$

پ) $f(x) = (x-1)^2 + 2$

ت) $f(x) = (x+1)^2 - 2$

قسمت (ت)

۳ فرید بسکتبال بازی می‌کند. تصویر زیر یک پرتاب او را به سمت سبد نشان می‌دهد. صفحه مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً روی نقطه پرتاب توپ قرار گیرد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجه دوم با قانون $h(x) = k(x-q)^2 + p$ است. علامت k و p و q را تعیین کنید.



نمودار شبیه به نمودار تابع $y = -x^2$ است با این فرق که ۴ واحد به سمت چپ و ۷ واحد به سمت بالا رفته و همچنین در یک ضریب $K < 0$ ضرب شده است پس معادله آن به صورت زیر است:

$$y = k(x-q)^2 + P$$

$$y = k(x - (-4))^2 + 7 \Rightarrow y = k(x+4)^2 + 7 \quad \text{که } k < 0 \text{ می‌باشد.}$$

توجه کنید نقطه $\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ در این معادله صدق می‌کند پس:

$$0 = k(0+4)^2 + 7 \Rightarrow k = -\frac{7}{16}, \quad q = -4, \quad P = 7, \quad k = -\frac{7}{16}$$

فعالیت ۵

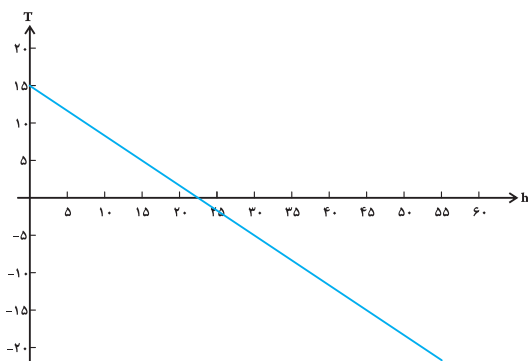
اگر دما در سطح دریا ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشد، در کوه دماوند رابطه بین دما (T) برحسب درجه سانتی‌گراد و ارتفاع از سطح دریا (h) برحسب متر) با تساوی $T(h) = 15 - \frac{h}{150}$ مشخص می‌شود. در اینجا T تابعی از h است و دامنه این تابع بازه $[0, 5610]$ است. (۵۶۱۰، ارتفاع قله دماوند برحسب متر است)

۱ $T(0)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

$T(0) = 15^\circ\text{C}$ یا همان سطح دریا است.

۲ در ارتفاع ۱۸۰۰ متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

$$T(1800) = 15 - \frac{1800}{150} = 15 - 12 = 3^\circ\text{C}$$



۳ نمودار تابع T رسم شده است با توجه به نمودار به سوالهای زیر پاسخ دهید. (ارتفاع h را روی محور افقی (هر واحد را ۱۰۰ متر در نظر می‌گیریم) و دمای T را روی محور عمودی نمایش داده شده است).

الف) تابع T ، از درجه است.

یک

ب) نمودار این تابع در چه نقطه‌ای محور افقی (ارتفاع) را قطع می‌کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟
در ۲۲۵۰ متری محور افقی (ارتفاع) را قطع می‌کند. نشان می‌دهد در ارتفاع ۲۲۵۰ دما صفر درجه است.

۴ جواب معادله $15 - \frac{h}{150} = 0$ را بیابید. جواب این معادله چه چیزی را نشان می‌دهد؟

$$15 - \frac{h}{150} = 0 \Rightarrow \frac{h}{150} = 15 \Rightarrow h = 15 \times 150 = 2250$$

۵ از مقایسه (۳) و (۴) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

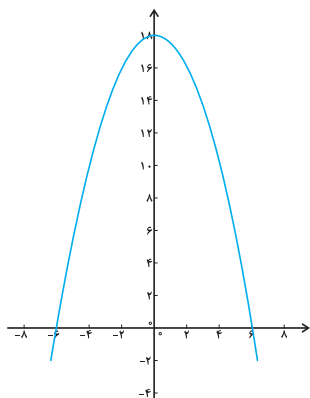
طول نقاطی که خط محور h را قطع می‌کند ریشه معادله $15 - \frac{h}{150} = 0$ می‌باشد.

کار در کلاس ۵

آب از بالای آبشاری که ارتفاع آن ۱۸۰ متر است، به رودخانه می‌ریزد. تابع h با قانون $h(t) = -5t^2 + 180$ مدلی ریاضی است که ارتفاع هر قطره آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جدا شدن از بالای آبشار مشخص می‌کند.

۱ ارتفاع یک قطره آب از سطح رودخانه بعد از ۲ ثانیه، چقدر است؟

$$h(2) = -5(2)^2 + 180 = 160 \text{ m}$$



۲ نمودار تابع با قانون $h(t)$ و دامنه R آورده شده است. (زمان را روی محور افقی و ارتفاع را روی محور عمودی، هر واحد ۱۰ متر، در نظر بگیرید.) نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور h را قطع می‌کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟
نمودار تابع را در نقطه‌های ۶ و -۶ قطع می‌کند. این نقطه‌ها ریشه‌های معادله $h(t) = 0$ هستند.

۳ جواب‌های معادله $-5t^2 + 180 = 0$ چه مقادیری هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.
۶ و -۶، قابل قبول نیست. زیرا زمان نمی‌تواند منفی باشد.

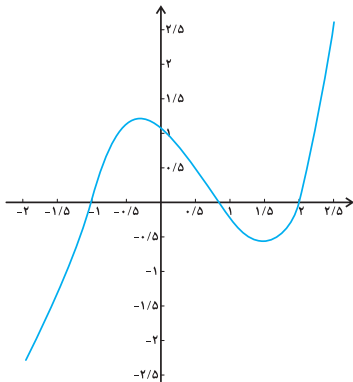
۴ دامنه تابع h را طوری تعیین کنید که قانون $h(t)$ ارتفاع قطره آب از سطح رودخانه را مشخص کند.

$$D_h = \{t \in R \mid 0 \leq t \leq 6\}$$



مسائل

۱ اگر نمودار تابع f به شکل روبه رو باشد، کدام گزینه جواب‌های معادله $f(x) = 0$ است.



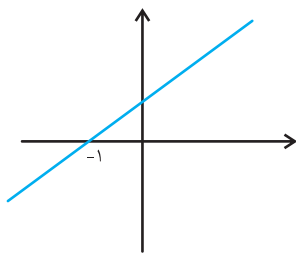
- (الف) ۲ و ۲- و ۱-
(ب) ۱ و ۱- و ۰/۸
(پ) ۲ و ۰/۸ و ۱-
(ت) معادله جواب ندارد

جواب‌های معادله عبارت‌اند از نقاطی که نمودار با محور افقی برخورد داشته باشد که این نقاط عبارت‌اند از:

$$(-1, 0/8, 2)$$

پس گزینه «پ» صحیح می‌باشد.

۲ شکل زیر نمودار خط به معادله $y = ax + 2$ است، با استفاده از شکل a را پیدا کنید.

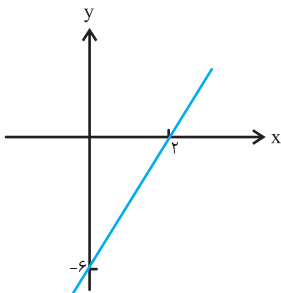


$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2$$

۳ معادلات زیر را به کمک رسم نمودار با استفاده از جتوجبرا حل کنید.

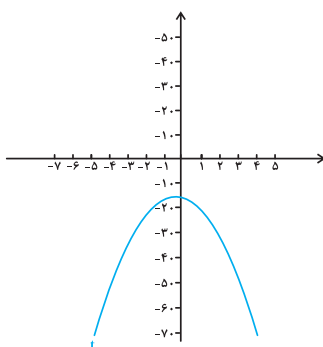
$$3x - 6 = 0$$

(الف) $x = 2$ جواب معادله می‌باشد.

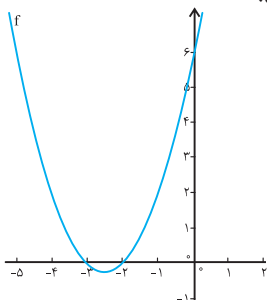


(ب) همانطور که مشاهده می‌شود نمودار با محور x ها برخورد ندارد در نتیجه معادله جواب ندارد.

$$-3x^2 - 2x = 16$$



(پ) طبق نمودار می‌توان گفت از نقاط ۲- و ۳- گذشته است پس ریشه‌ها (جواب‌های) این معادله‌ی درجه دوم ۲- و ۳- می‌باشد. $x^2 + 5x + 6 = 0$



ت) طبق شکل نقاط برخورد با محور طول‌ها عبارت‌اند از:

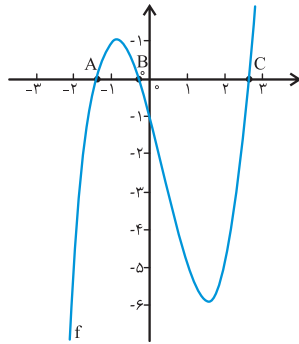
$$A(-1/28, 0)$$

$$B(0/27, 0)$$

$$C(2/65, 0)$$

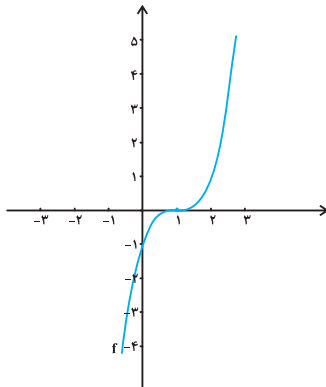
که این سه نقطه جواب این معادله است.

$$x^3 - x^2 = 4x + 1$$



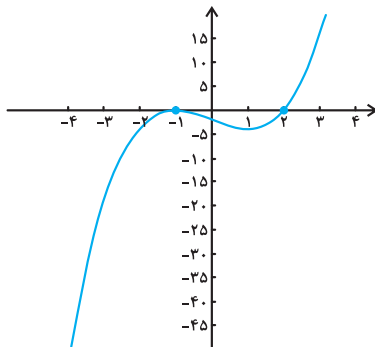
ث) طبق نمودار جواب معادله $x = 1$ می‌باشد.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$



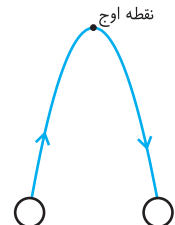
ج) جواب معادله $x = 2$ و $x = -1$ می‌باشد.

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$



۴ اگر توپی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (برحسب متر) تابعی از زمان (برحسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با h و زمان را با t نشان دهیم برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت $h(t) = -5t^2 + 20t$ است. دامنه تابع $[0, 4]$ است. در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ چند جواب به دست می‌آید؟ چرا؟

دقت نمایید توپ که از سطح زمین به هوا پرتاب می‌شود به ارتفاع ماکسیمم خود می‌رسد و پس از آنکه به نقطه اوج خود رسید دوباره به سمت پایین می‌رود مانند شکل رو به رو



اگر خوب به شکل نگاه کنیم متوجه می‌شویم این تابع از ارتفاع $h = 0$ شروع به کار کرده و نهایتاً نیز زمانی که به زمین برخورد کرده ارتفاعش صفر شده است مقدار $h(t) = 0$ را محاسبه می‌نماییم.

$$0 = -5t^2 + 20t \Rightarrow t(-5t + 20) = 0 \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{-20}{-5} = 4 \end{cases}$$

$$D_h = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 4\}$$

پس دامنه‌ی این تابع به صورت رو به رو است:



فعالیت ۶

۱ درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادله درآمد را تشکیل دهید.

$$R = x \cdot P$$

۲ رابطه بین قیمت کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $x = 80000 - 200P$ است. تابع درآمد را بر حسب P بنویسید.

$$x = 80000 - 200P$$

$$R = (80000 - 200P)P \Rightarrow R = 80000P - 200P^2$$

۳ چند جمله‌ای قانون تابع درآمد بر حسب P از درجه چند است؟

از درجه ۲ می‌باشد.

۴ رابطه‌ای برای P بنویسید که در آن، درآمد حاصل از فروش دست‌سازها، بیشتر از ۸ میلیون تومان باشد.

$$\frac{x1}{-200}(-200P^2 + 80000P > 8,000,000) \Rightarrow P^2 - 40P < -40000 \Rightarrow P^2 - 40P + 40000 < 0$$

ریاضی (۲)



کار در کلاس ۶

در یک شرکت سازنده تلفن همراه، رابطه بین قیمت فروش تلفن همراه (p)، (بر حسب صدهزار تومان) و تعداد تلفن همراه فروخته شده (x)، از رابطه $x = 25 - 0.15p$ به دست می‌آید.

۱ مقدار x را بر حسب P بنویسید.

$$P = 25 - 0.15x \Rightarrow -0.15x = P - 25 \Rightarrow x = \frac{P - 25}{-0.15} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}P + \frac{500}{3}$$

۲ درآمد حاصل از فروش تعداد x کالا ($R(p)$) را بر حسب P بنویسید.

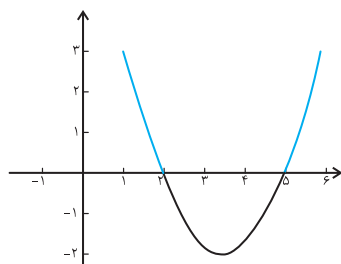
$$R = x \cdot P \Rightarrow R = \left(\frac{500}{3} - \frac{4}{3}P\right)P \Rightarrow R = \frac{500}{3}P - \frac{4}{3}P^2$$

۳ نامعادله‌ای بنویسید که نشان دهد برای چه مقدارهای P ، درآمد حاصل از فروش، بیشتر از ۴۰۰ میلیون است.

$$\frac{500}{3}P - \frac{4}{3}P^2 > 400,000,000$$



فعالیت ۷



تابع $f(x) = x^2 - 7x + 10$ را با دامنه R در نظر بگیرید. نمودار آن رسم شده است.

۱ طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور x ها، چه چیزی را نشان می‌دهند؟

نقاط برخورد نمودار با محور x ها یعنی نقاط ۲ و ۵ نشان‌دهنده جواب‌های (ریشه‌ها) معادله درجه دوم فوق است یا به عبارت دیگر تابع در این نقاط صفر می‌شود.

۲ با استفاده از نمودار، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را به دست آورید.

$$f(2) = f(5) = 0$$

با توجه به نمودار می‌توان گفت:

راهنمای گام به گام

۳ آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور x قرار گرفته است، رنگی (پررنگ) کنید و جمله زیر را کامل کنید:

عرض نقاط رنگی (کوچکتر از صفر / بزرگتر از صفر) است.

بزرگتر از صفر

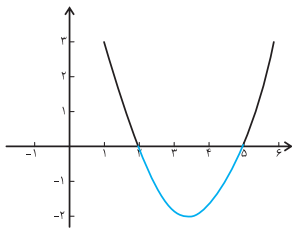
۴ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر از دامنه را به صورت بازه نمایش دهید.



۵ مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 7x + 10 > 0$ با مجموعه به دست آمده در (۴) چه رابطه‌ای دارد؟ توضیح دهید.

دقیقاً برابر است زیرا در اینجا گفته شده است $x^2 - 7x + 10 > 0$ یعنی $f(x) > 0$ یعنی مقادیری که تابع $f(x)$ بزرگتر از ۰ باشد، پس چه بگوییم $f(x) > 0$ یا چه بگوییم نمودار $f(x)$ بالای محور طول‌ها باشد یکپست و فرقی نمی‌کند.

۶ آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور x قرار گرفته است با رنگ دیگری مشخص کنید.



۷ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ این قسمت از دامنه را با استفاده از بازه‌ها بنویسید.

به ازای $2 < x < 5$ می‌توان گفت تابع دارای مقدار منفی است.

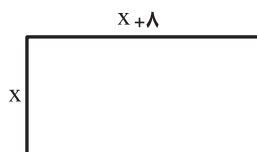


۸ آیا مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 7x + 10 < 0$ همان مجموعه به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

بله. دقیقاً همان مقدار است. مقادیری که مقدار تابع منفی است یعنی $f(x) < 0$ باشد و همانطور که می‌دانیم مقادیر $f(x)$ زیر نمودار نیز منفی هستند پس می‌توان گفت این دو با هم برابر هستند.

کار در کلاس ۷

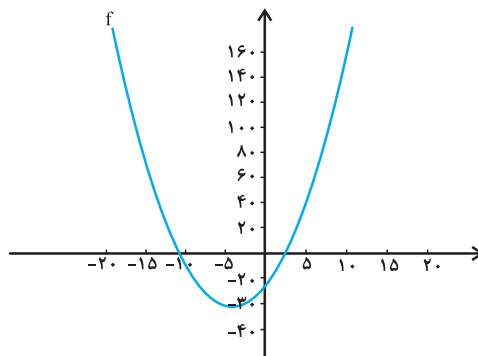
مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۸ سانتی‌متر بیشتر از عرض آنها است. عرض این مستطیل‌ها چه مقادیری باید داشته باشند تا مساحت آنها از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر باشد.



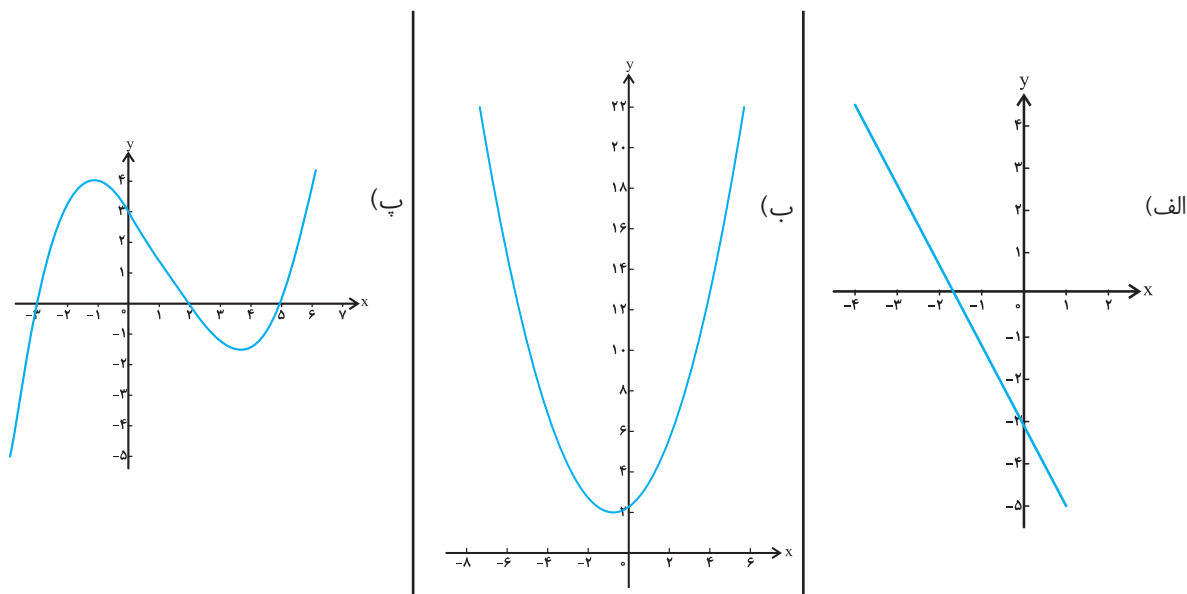
$$S = x \cdot (x + 8) \Rightarrow S = x^2 + 8x < 25 \Rightarrow x^2 + 8x - 25 < 0$$

نمودار این نامعادله را رسم می‌کنیم طبق نمودار می‌توان گفت تابع در مقادیر $(-10/4, 2/4)$ منفی

است و چون مقادیر منفی نمی‌تواند باشد پس بازه $(0, 2/4)$ قابل قبول است.



۱ در زیر نمودارهای چهار تابع رسم شده است. در هر مورد، مجموعه جواب‌های نامعادله $f(x) \geq 0$ را مشخص کنید.



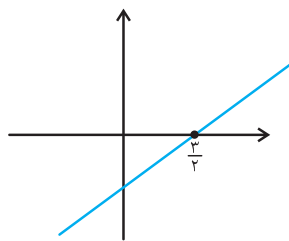
(پ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-3, 2] \cup [5, +\infty)\}$

(ب) $\{x \in \mathbb{R}\}$

(الف) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1/5\}$

۲ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

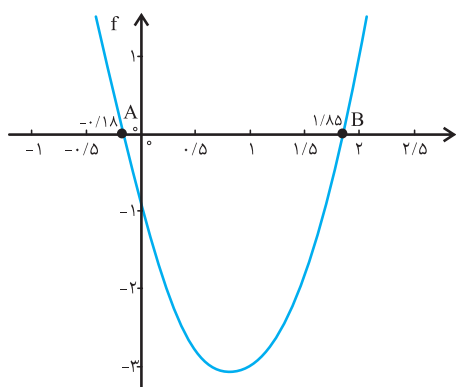
$2x - 3 < 0$



(الف) روش اول: همانطور که در شکل مشخص است در بازه $x \in (-\infty, \frac{3}{2})$ مقدار این خط منفی است.
روش دوم:

$$2x - 3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}, \quad x \in (-\infty, \frac{3}{2})$$

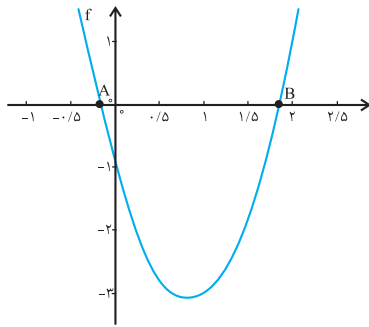
$3x^2 - 5x - 1 > 0$



(ب) روش اول: همانطور که می‌دانید در مقادیری که نمودار تابع بالای محور x هاست تابع دارای مقدار مثبت است پس طبق نمودار در بازه زیر می‌توان گفت تابع مقدار مثبت دارد.

$$x \in (-\infty, -1/8) \cup (1/3, +\infty)$$

روش دوم: البته این مثال را می‌توان بدون جئوجبرا نیز رسم کرد.



$$3x^2 - 5x - 1, \quad \Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-1) = 37$$

$$x_1 = +\frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.85, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.18$$

چون ضریب x^2 مثبت است می‌توان گفت این تابع دارای نقطه مینیمم است طول نقطه

مینیمم از رابطه $-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید یا به عبارت دیگر $x_{\min} = \frac{+5}{6} = 0.83$ که با

جایگذاری در معادله $y_{\min} = -3/0.8 = -3.75$ به دست می‌آید. پس با توجه به این سه نقطه نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

روش سوم: استفاده از مربع کامل

$$3x^2 - 5x - 1 > 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} > 0$$

ابتدا نمودار $x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ با استفاده از روش مربع کامل حل می‌نماییم.

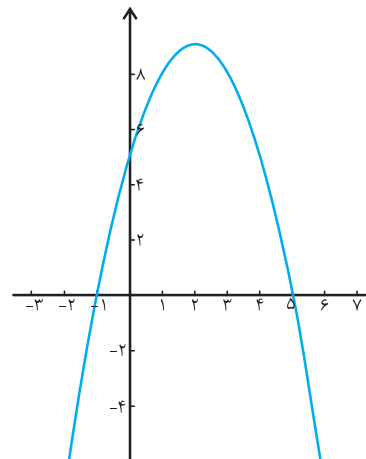
$$x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{1}{3} + \frac{25}{36} \Rightarrow (x - \frac{5}{6})^2 = \frac{37}{36} \Rightarrow$$

$$y = (x - \frac{5}{6})^2 - \frac{37}{36} \quad k=1, \quad q = \frac{5}{6}, \quad p = -\frac{37}{36}$$

$$x \in (-\infty, -0.18) \cup (1.85, +\infty)$$

$$-x^2 + 4x + 3 \geq -2$$

$$x \in [-1, 5]$$



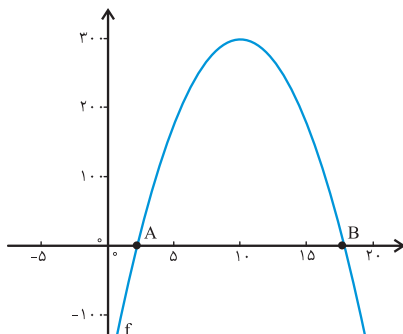
(پ)

۳ پرتابه‌ای به طور عمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرتابه از سطح دریا (برحسب متر) به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) با رابطه $h(t) = -5t^2 + 100t$ داده شده است. مشخص کنید در چه بازه زمانی، ارتفاع این پرتابه بیش از ۲۰۰ متر خواهد بود.

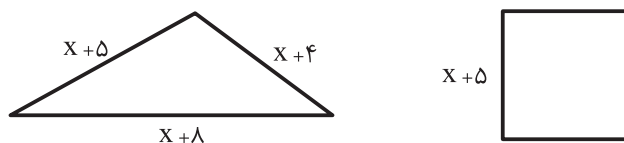
$$h(t) = -5t^2 + 100t, \quad h(t) > 200, \quad -5t^2 + 100t > 200 \Rightarrow -5t^2 + 100t - 200 > 0$$

طبق نمودار رسم شده با جئوجبرا در می‌یابیم که در بازه بین نقاط A و B این تابع دارای برد مثبت است.

$$x \in (2/25, 17/25)$$



۴ مقدار x را طوری بیابید که اندازه محیط مثلث از اندازه مساحت مربع کمتر باشد.

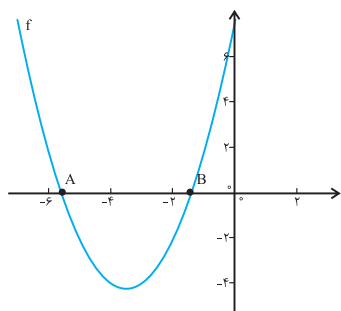


محیط مثلث

محیط مثلث: $X + 5 + X + 8 + X + 4 = 3X + 17$

مساحت مربع: $(X + 5)^2 = X^2 + 10X + 25$

$3X + 17 < X^2 + 10X + 25 \Rightarrow X^2 + 7X + 8 > 0$

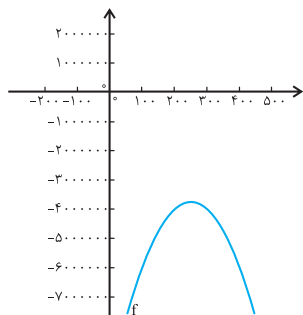


طبق نمودار کشیده شده با جتوجبرا می‌توان گفت در x های کوچکتر از نقطه A ، x های بزرگتر از نقطه B نمودار مقدار مثبت دارد. پس داریم:

$x \in (-\infty, A) \cup (B, +\infty) \Rightarrow x \in (-\infty, -8) \cup (-1, +\infty)$

۵ علی به تازگی یک کارگاه تولید قطعات یدکی راه‌اندازی کرده است. درآمد حاصل از فروش کالا به قیمت p (برحسب تومان) از قانون

$R(p) = -100p^2 + 5000p$ به دست می‌آید. به ازای چه مقادیری برای p ، میزان درآمد شرکت بیش از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ است؟



$R(p) = -100p^2 + 5000p$

$R(p) > 10,000,000 \Rightarrow -100p^2 + 5000p > 10,000,000 \rightarrow -100p^2 + 5000p - 10,000,000 > 0$

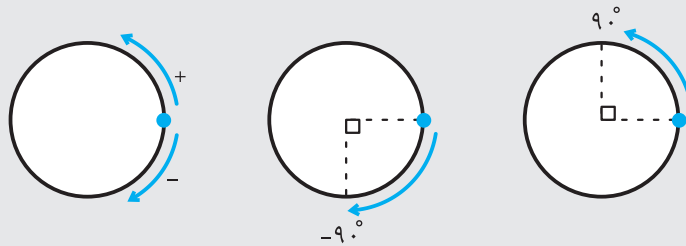
طبق نمودار مشاهده می‌شود به ازای تمام مقادیر p منفی است پس مسئله جواب ندارد.

زاویه چرخش

زاویه چرخش: به زاویه‌هایی که با چرخش ایجاد می‌شوند، زاویه چرخش می‌گویند. این زاویه‌ها می‌توانند از 180° هم بیشتر شوند و هر مقداری می‌توانند باشند. مثلاً با چرخش به اندازه یک دور کامل، زاویه چرخش 360° می‌باشد.

نکته:

چرخش در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را مثبت و چرخش در جهت حرکت عقربه‌های ساعت را منفی در نظر می‌گیرند.

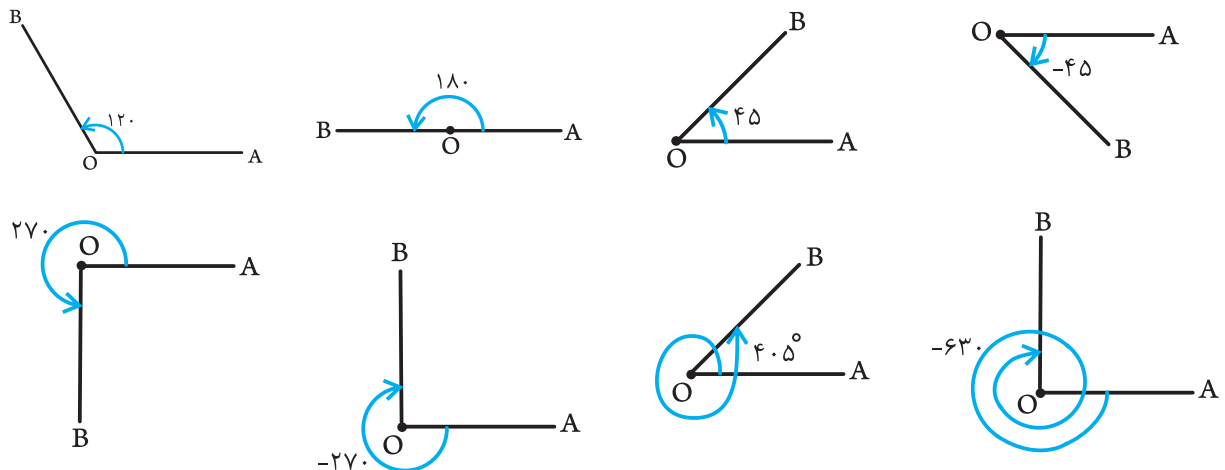


زاویه‌های با مقدار منفی را زاویه منفی می‌نامند. دو زاویه که مقدار آنها یکدیگر باشد را دو زاویه قرینه می‌نامند. مثلاً دو زاویه 90° و -90° قرینه یکدیگرند.

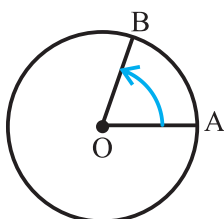
تذکر: زاویه را می‌توان به عنوان چرخش یک نیم خط نسبت به یک نیم خط دیگر هم در نظر گرفت. زاویه چرخش یک مفهوم نقطه هندسی نیست و در آن از مفهوم حرکت و جهت حرکت نیز استفاده می‌شود.

مثال: نیم خط OA را ثابت و نیم خط OB حول نقطه O که در حال چرخش است در نظر گرفته و زاویه‌های 120° و 180° و -45° و 45° و 270° و -270° و 405° و -630° را جداگانه رسم کنید.

حل:

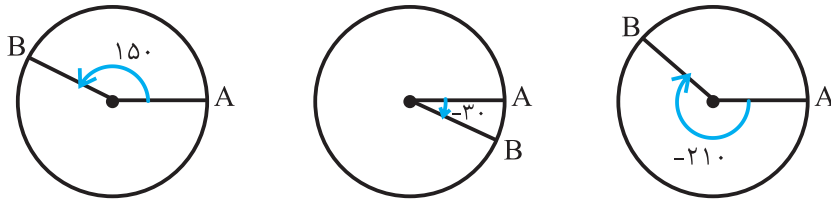


مفهوم زاویه چرخش در یک دایره: اگر یک دایره و روی آن یک نقطه مانند A را به عنوان مبدأ در نظر بگیریم با حرکت یک نقطه مانند B از این مبدأ (یعنی نقطه A) شعاع OB حول نقطه O چرخش می‌کند و زاویه‌ای با شعاع OA می‌سازد. مقدار این زاویه را زاویه چرخش نقطه B از مبدأ A می‌نامند. بنابراین هرگونه حرکت نقطه B روی دایره، یک زاویه چرخش را معین می‌کند و هر زاویه چرخش، نقطه‌ای متناظر روی دایره می‌باشد (مانند شکل رو به رو)



مثال: نقاط متناظر زاویه‌های 15° و -3° و -21° را روی دایره مشخص کنید.

حل:



مثال: اگر متحرکی ۳ بار یک مسیر دایره‌ای شکل را در جهت منفی بدود،

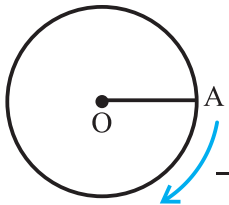
الف) زاویه چرخش او نسبت به نقطه شروع چند درجه است؟

هر دایره 360° است و چون در جهت منفی می‌دود هر بار را -360° در نظر می‌گیریم و چون ۳ بار کل دایره را طی کرده پس زاویه چرخش متحرک برابر است با:

$$(-360) \times 3 = -1080^\circ$$

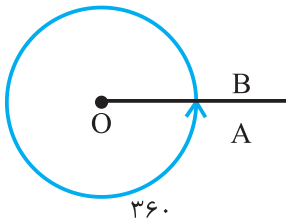
ب) موقعیت متحرک را از نظر مکانی روی دایره مشخص کنید.

از نظر مکانی متحرک بعد از سه دور کامل به مکان اولیه یعنی مبدأ حرکت بر می‌گردد.



مثال: وضعیت دو نیم خط که زاویه چرخش آن‌ها 360° است چگونه است؟

حل: این دو نیم خط روی هم منطبق‌اند.

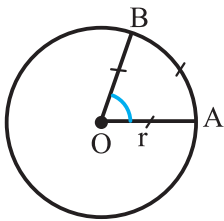


واحدهای اندازه‌گیری زاویه

به طور کلی واحدهای اندازه‌گیری زاویه عبارتند از: درجه، رادیان و گراد که در این کتاب با درجه و رادیان سر و کار داریم.

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت تقسیم کنیم به هر قسمت ۱ درجه می‌گویند.

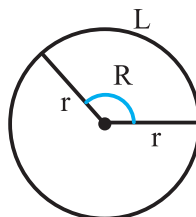
رادیان: یک رادیان کمانی از دایره است که با شعاع دایره برابر است.



به طور کلی:

اگر نقطه‌ای از یک دایره به شعاع r ، کمانی به طول L را در جهت مثبت طی کند، مقدار $\frac{L}{r}$ را اندازه زاویه چرخش آن نقطه برحسب رادیان می‌نامند. برای زاویه‌های منفی، $-\frac{L}{r}$ را مقدار آن زاویه برحسب رادیان می‌نامند.

$$R (\text{رادیان}) = \frac{L}{r}$$



دایره‌ای که شعاع آن ۱ واحد باشد را دایره واحد می‌نامند.

نکته:

در دایره واحد، طول کمان طی شده همان اندازه زاویه چرخش برحسب واحد رادیان است.

رابطه بین رادیان و درجه: اگر اندازه یک زاویه برحسب رادیان را با R و اندازه آن زاویه برحسب درجه را با D نشان دهیم رابطه‌های زیر بین آن‌ها برقرار است.

$$D = \frac{180}{\pi} R, \quad R = \frac{\pi}{180} D$$

مثال: ۱ رادیان چند درجه است؟

حل: با استفاده از رابطه بین درجه و رادیان داریم:

$$D = \frac{180}{\pi} \times R = \frac{180}{\pi} \times 1 = \frac{180}{\pi} \approx \frac{180}{3.14} \approx 57.3$$

یعنی یک رادیان تقریباً ۵۷ درجه است.

مثال: ۱ درجه چند رادیان است؟

حل: با استفاده از رابطه بین درجه و رادیان داریم:

$$R = \frac{\pi}{180} \times D = \frac{\pi}{180} \times 1 = \frac{\pi}{180} \approx \frac{3.14}{180} \approx 0.017$$

یعنی یک درجه تقریباً ۰/۰۱۷ رادیان است.

مثال: ۲۰ درجه چند رادیان است؟

حل:

$$R = \frac{\pi}{180} \times D = \frac{\pi}{180} \times 20 = \frac{\pi}{9}$$

تذکر: معمولاً زاویه‌هایی که برحسب رادیان بیان می‌شوند نماد π در آن‌ها به کار می‌رود. به همین دلیل در بیان اندازه یک زاویه، اگر نماد π در آن باشد منظور آن است که واحد زاویه رادیان است مگر آنکه صریحاً گفته شود واحد زاویه درجه است.

مثال: ۱۸۰ درجه چند رادیان است؟

حل:

$$R = \frac{\pi}{180} \times D = \frac{\pi}{180} \times 180 = \pi$$

نکته:

۱۸۰ درجه π رادیان

مثال: زاویه‌های $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{-5\pi}{4}$ و 2π را برحسب درجه بنویسید.

حل: برای تبدیل رادیان به درجه، کافی است جای π عدد ۱۸۰ درجه را بگذاریم.

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \times 180}{2} = 270^\circ, \quad \frac{\pi}{6} = \frac{180}{6} = 30^\circ, \quad \frac{-5\pi}{4} = \frac{-5 \times 180}{4} = -225^\circ, \quad 2\pi = 2 \times 180 = 360^\circ$$

مثال: زاویه‌های 60° و 120° و -150° و 81° را برحسب رادیان بنویسید.

حل: از رابطه $R = \frac{\pi}{180} \times D$ استفاده می‌کنیم.

$$R = \frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ رادیان می‌باشد} \quad 60^\circ$$

$$R = \frac{\pi}{180} \times 120 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان است.} \quad 120^\circ$$

$$R = \frac{\pi}{180} \times (-150) = -\frac{5\pi}{6} \Rightarrow -\frac{5\pi}{6} \text{ رادیان است} \quad -150^\circ$$

$$R = \frac{\pi}{180} \times 81 = \frac{9\pi}{20} \Rightarrow \frac{9\pi}{20} \text{ رادیان است.} \quad 81^\circ$$

مثال: در یک چرخ و فلک به شعاع ۵ متر

الف) اگر یک کابین نسبت به حالت اولیه خود به اندازه ۳ رادیان چرخیده باشد چه مسافتی را طی کرده است؟

$$R = \frac{L}{r} \Rightarrow 3 = \frac{L}{5} \Rightarrow L = 15 \text{ متر}$$

ب) اگر مسافت طی شده توسط کابین ۴۵ متر باشد زاویه چرخش کابین برحسب درجه و رادیان چقدر است؟

$$R = \frac{L}{r} \Rightarrow R = \frac{45}{5} = 9$$

بنابراین کابین به اندازه ۹ رادیان چرخیده است.

$$D = \frac{180}{\pi} \times R = \frac{180}{\pi} \times 9 = \frac{1620}{\pi} \approx \frac{1620}{3.14} \approx 515.9$$

یعنی این کابین تقریباً به اندازه ۵۱۶ درجه چرخیده است.

ج) اگر یک کابین به اندازه ۱۲۰ درجه چرخش کرده باشد، مسافت طی شده توسط کابین چقدر است؟

ابتدا 120° را به رادیان تبدیل کرده و از رابطه $R = \frac{L}{r}$ مسافت طی شده یا L را می‌یابیم:

$$R = \frac{\pi}{180} \times D = \frac{\pi}{180} \times 120 = \frac{2\pi}{3}$$

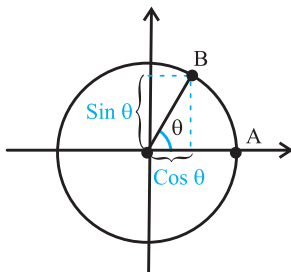
$$R = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{L}{5} \Rightarrow 3L = 10\pi \Rightarrow L = \frac{10\pi}{3} \approx \frac{10 \times 3.14}{3} \Rightarrow L \approx 10.47 \text{ متر}$$

بیشتر بدانیم: اگر محیط دایره را به ۴۰۰ قسمت تقسیم کنیم به هر قسمت ۱ گراد می‌گویند.

رابطه بین گراد و رادیان و درجه به صورت زیر است:

$$\left(\text{که } D \text{ درجه، } R \text{ رادیان، } G \text{ گراد است} \right) \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه دلخواه



محورهای مثلثاتی و دایره مثلثاتی: در صفحه مختصات، دایره واحد به مرکز مبدأ مختصات

را در نظر می‌گیریم، نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را به عنوان مبدأ برای اندازه‌گیری زاویه

در نظر می‌گیریم. اگر نقطه B متناظر زاویه چرخش θ باشد، طول نقطه B را $\cos \theta$ و عرض B را $\sin \theta$ می‌نامند.

از آنجایی که کسینوس یک زاویه، طول نقطه متناظر زاویه و سینوس یک زاویه، عرض نقطه متناظر زاویه است، محور افقی را محور کسینوس‌ها و محور عمودی را محور سینوس‌ها می‌نامند.

در این حالت در شکل بالا دایره واحد به مرکز مبدأ مختصات را دایره مثلثاتی می‌نامند و نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ مبدأ اندازه‌گیری زاویه‌هاست.

مثال: طبق دایره مثلثاتی، سینوس و کسینوس زاویه‌های 0° و 90° و 180° و 270° و 360° را به دست آورید.

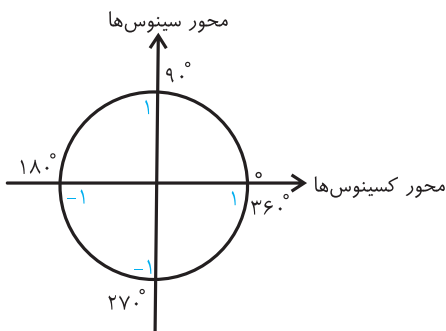
حل: طبق شکل، نقطه متناظر زاویه‌های 0° ، 360° ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است بنابراین $\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = 0$

و $\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = 1$ و نقطه متناظر زاویه 90° ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ است بنابراین $\sin 90^\circ = 1$

و $\cos 90^\circ = 0$ و نقطه متناظر زاویه 180° ، $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است بنابراین $\sin 180^\circ = 0$

و $\cos 180^\circ = -1$ و نقطه متناظر زاویه 270° ، $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ است بنابراین $\sin 270^\circ = -1$

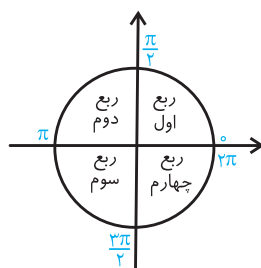
و $\cos 270^\circ = 0$ است.



نکته:

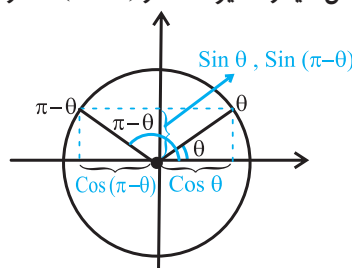
جدول زیر حفظ شود.

زاویه بر حسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
زاویه بر حسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰	۱



تذکره: دایره مثلثاتی، صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کند که مطابق شکل زیر این چهار قسمت را ربع‌های اول، دوم، سوم و چهارم دایره مثلثاتی گویند.

مثال: زاویه تند θ و زاویه $\pi - \theta$ را روی دایره مثلثاتی مشخص کنید و مقادیر $\sin \theta$ و $\sin(\pi - \theta)$ و مقادیر $\cos \theta$ و $\cos(\pi - \theta)$ را با هم مقایسه کنید.



طبق شکل بالا می‌بینیم که $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ و $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ به طور کلی برای هر زاویه دلخواه θ تساوی‌های بالا برقرار است.

مثال: سینوس و کسینوس زاویه‌های ۱۲۰° و $\frac{5\pi}{۶}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ را بیابید.

$$\begin{aligned} \sin ۱۲۰^\circ &= \sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{3}}{۲} & \cos ۱۲۰^\circ &= \cos(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\cos ۶۰^\circ = -\frac{1}{۲} \\ \sin \frac{5\pi}{۶} &= \sin(\pi - \frac{\pi}{۶}) = \sin \frac{\pi}{۶} = \frac{1}{۲} & \cos \frac{5\pi}{۶} &= \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos \frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{3}}{۲} \\ \sin \frac{۳\pi}{۴} &= \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{2}}{۲} & \cos \frac{۳\pi}{۴} &= \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{2}}{۲} \end{aligned}$$

حل:

نکته‌ها:

* روابط بین نسبت‌های مثلثاتی $(-\theta, \theta)$ ، $(\theta, \pi + \theta)$ ، $(\theta, \pi - \theta)$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

(۱) رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی $\pi - \theta, \theta$:

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta, \quad \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

(۲) رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی $\pi + \theta, \theta$:

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

(۳) رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی $-\theta, \theta$:

$$\sin(۲\pi + \theta) = \sin \theta, \quad \cos(۲\pi + \theta) = \cos \theta$$

(۴) رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی $\theta, ۲\pi + \theta$:

$$\sin(۲\pi - \theta) = -\sin \theta, \quad \cos(۲\pi - \theta) = \cos \theta$$

(۵) رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی $\theta, ۲\pi - \theta$:

* به طور کلی اگر به یک زاویه (بر حسب رادیان) مضرب‌های صحیحی از اضافه یا کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها تغییر نمی‌کند به عبارتی دیگر:

$$\begin{aligned} \sin(۲k\pi + \theta) &= \sin \theta, & \cos(۲k\pi + \theta) &= \cos \theta \\ \sin(۲k\pi - \theta) &= \sin(-\theta) = -\sin \theta, & \cos(۲k\pi - \theta) &= \cos(-\theta) = \cos \theta \end{aligned}$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

حل:

الف) $\sin 240^\circ + \cos \frac{5\pi}{6}$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 240^\circ + \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

توجه: منظور از $\sin^2 \theta$ همان $(\sin \theta)^2$ است.

ب) $2\cos(-\frac{5\pi}{4}) - 3\sin^2 300^\circ$

$$\cos(-\frac{5\pi}{4}) = \cos \frac{5\pi}{4} = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\cos(-\frac{5\pi}{4}) - 3\sin^2 300^\circ = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 3(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = -\sqrt{2} - 3(\frac{3}{4}) = -\sqrt{2} - \frac{9}{4} = \frac{-4\sqrt{2} - 9}{4}$$

ج) $\sin(-\frac{17\pi}{3}) =$

$$\sin(-\frac{17\pi}{3}) = -\sin \frac{17\pi}{3} = -\sin(\frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = -\sin(6\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin(-\frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال: اگر α و β دو زاویه مکمل باشند ثابت کنید $\cos \alpha + \cos \beta = 0$

حل: از آنکه α و β مکمل یکدیگرند پس $\alpha + \beta = \pi$ از آنجا نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \pi - \beta$ بنابراین داریم:

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos(\pi - \beta) + \cos \beta = -\cos \beta + \cos \beta = 0$$

نتیجه: اگر ۲ زاویه مکمل یکدیگر باشند، مجموع کسینوس‌هایشان صفر است.

مثال: حاصل عبارت $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 170^\circ$ را بیابید.

حل: ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم (مکمل‌ها در کنار هم)

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ &= (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \cos(30^\circ + \cos 150^\circ) \\ &+ (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

تعریف تانژانت و کتانژانت یک زاویه: اگر α زاویه‌ای باشد که $\cos \alpha \neq 0$ آن‌گاه تعریف می‌کنیم: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ و اگر α زاویه‌ای باشد که $\sin \alpha \neq 0$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

نتیجه: $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ معکوس یکدیگرند.

مثال: مقادیر $\tan 315^\circ$ و $\cot \frac{5\pi}{6}$ را بیابید.

حل:

$$\tan 315^\circ = \frac{\sin 315^\circ}{\cos 315^\circ} = \frac{\sin(360^\circ - 45^\circ)}{\cos(360^\circ - 45^\circ)} = \frac{-\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\cot \frac{5\pi}{6} = \frac{\cos \frac{5\pi}{6}}{\sin \frac{5\pi}{6}} = \frac{\cos(\pi - \frac{\pi}{6})}{\sin(\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{-\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

نکته: برای زاویه دلخواه داریم:

۱) $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$

۲) $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$

۳) $\tan(-\theta) = -\tan \theta$

۴) $\tan(2k\pi + \theta) = \tan(+\theta) = \tan \theta$

۵) $\tan(2k\pi - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta$

مشابه نکات بالا را برای کتانژانت نیز داریم.

$$\tan 30^\circ = \tan(36^\circ - 6^\circ) = \tan(-6^\circ) = -\tan 6^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نکته:

سینوس و کسینوس هر زاویه‌ای، اعدادی در بازه $[-1, 1]$ می‌باشند. به عبارتی دیگر برای زاویه دلخواه θ داریم:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

(۱) رابطه بین سینوس و کسینوس یک زاویه:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases}$$

(۲) رابطه بین $\tan \theta$ و $\cot \theta$: می‌دانیم $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ بنابراین داریم:

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \Rightarrow \tan \theta \times \cot \theta = 1$$

(۳) رابطه بین تانژانت و کسینوس:

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$
 اثبات

(۴) رابطه بین کتانژانت و سینوس:

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

نکته:

علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ناحیه:

θ	ناحیه اول $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	ناحیه دوم $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	ناحیه سوم $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	ناحیه چهارم $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

مثال: اگر θ در ربع دوم باشد، $\sin \theta = \frac{4}{5}$ باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

حل: از رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ و معلوم بودن $\sin \theta$ ، مقدار $\cos \theta$ را می‌یابیم:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{در ربع دوم کسینوس منفی است}} \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

مثال: درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید.

حل:

الف) $\sin^4 30^\circ - \cos^4 30^\circ = 1 - 2\cos^2 30^\circ$

$$\sin^4 30^\circ - \cos^4 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} - \frac{9}{16} = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2}$$

$$1 - 2\cos^2 30^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{6}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

چون حاصل طرف اول و طرف دوم هر دو برابر $-\frac{1}{2}$ شد پس تساوی (الف) درست است.

ب) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

در اینطور مسائل از یک طرف تساوی شروع می‌کنیم و به طرف دیگر تساوی می‌رسیم:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1} + 2\sin \alpha \cos \alpha + \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1} - 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + 1 = 2$$

ج) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

طرف دوم $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - (1 - \sin x) = 1 - 1 + \sin x = \sin x$

مثال: اگر $\tan \alpha = 2$ باشد حاصل $\frac{\Delta \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$ را بیابید.

حل: تمام جملات را بر $\cos \alpha \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\Delta \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\Delta \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{3 \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\Delta \tan \alpha - 3}{2 \tan \alpha + 1} = \frac{\Delta(2) - 3}{2(2) + 1} = \frac{7}{5}$$

مثال: اگر $\sin \theta \cdot \cos \theta > 0$ باشد حدود θ را بیابید.

حل: از اینکه ضرب سینوس و کسینوس مثبت است پس یا هر دو مثبت‌اند یا هر دو منفی‌اند اگر $\sin \theta$ و $\cos \theta$ هر دو مثبت باشند θ در ناحیه اول است یعنی $0^\circ < \theta < 90^\circ$ اگر $\sin \theta$ و $\cos \theta$ هر دو منفی باشند پس θ در ناحیه سوم است یعنی $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

مثال: اگر $\cos \theta = \frac{2}{3}$ و θ در ربع چهارم باشد مقدار $\sin(2\pi - \theta)$ را بیابید:

حل: $\sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta$

در ناحیه چهارم سینوس منفی است $\Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ می‌دانیم

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow -\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin(2\pi - \theta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

تذکر مهم:

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = (\sin \theta)^2 \\ \sin^2 \theta \neq \sin \theta^2 \\ \sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 30^\circ = (\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 30^\circ \neq \sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ^2 = \sin 90^\circ \end{cases}$$

مثلاً:

زیرا $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ \neq \sin 90^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$

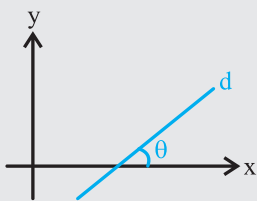
مثال: حاصل عبارت $A = \frac{2\sin^2 45^\circ - 3\cos 180^\circ \sin^2 90^\circ}{\tan 45^\circ + 2\cos^2 60^\circ - \cot 45^\circ}$ را بیابید.

حل: $\cot 45^\circ = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot(2\pi + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$

$$A = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3(-1)(1)^2}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{2 \times \frac{2}{4} + 3}{1 + \frac{2}{4} - 1} = \frac{1+3}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

شیب خط و تانژانت زاویه‌ها

نکته:



اگر خط d با محور x (با جهت مثبت محور x ها) زاویه θ بسازد آن گاه $\tan \theta = \text{شیب خط}$

یعنی مطابق شکل بالا داریم: $\tan \theta = \text{شیب خط } d$

مثال: شیب خطی که با محور x زاویه 30° می‌سازد برابر است با: $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

یادآوری: (۱) در خط به معادله $y = ax + b$ شیب خط برابر است با ضریب x یعنی $m = a$

(۲) در خط به معادله $ax + by + c = 0$ شیب خط برابر است با:

$$m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$$

(۳) شیب خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(۴) معادله خطی که از نقطه $A(x_0, y_0)$ بگذرد و شیب آن m باشد برابر است با $y - y_0 = m(x - x_0)$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-2, 1)$ بگذرد و با محور x زاویه $\frac{\Delta\pi}{4}$ می‌سازد.

حل: ابتدا تانژانت این زاویه را که شیب خط است به دست می‌آوریم. $m = \tan \frac{\Delta\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ شیب خط

بنابراین معادله خط برابر است با:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - (-2)) \Rightarrow y - 1 = x + 2 \Rightarrow y = x + 3$$

مثال: زاویه بین خط $y = \sqrt{3}x + 5$ با محور طول‌ها چند رادیان است؟

حل:

$$3y = \sqrt{3}x + 5 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \theta \Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ رادیان}$$

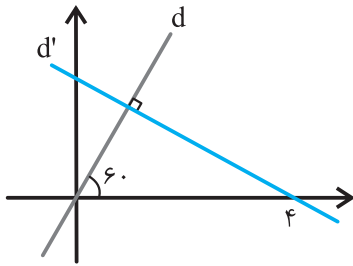
مثال: مقدار m را طوری بیابید که خط $(2m-1)x + my + 7 = 0$ با محور x زاویه 60° بسازد.

حل:

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha \Rightarrow -\frac{2m-1}{m} = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{-2m+1}{m} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}m = -2m+1 \Rightarrow \sqrt{3}m + 2m = 1$$

$$\Rightarrow m(\sqrt{3} + 2) = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3} + 2}$$

مثال: در شکل رو به رو معادله خط d و d' را بنویسید.



حل: ابتدا معادله خط d را می‌نویسیم.

$$d \text{ خط شیب } = m_d = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

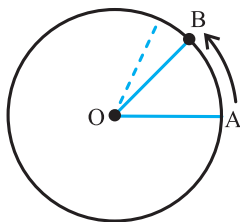
خط d از مبدأ یعنی نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد بنابراین:

$$d \text{ خط معادله: } y - 0 = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y = \sqrt{3}x$$

خط d' بر خط d عمود است، پس شیب خط d' معکوس و قرینه شیب خط d است یعنی $m_{d'} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و طبق شکل خط d' از نقطه $(0, 4)$ می‌گذرد بنابراین معادله خط d' برابر است با:

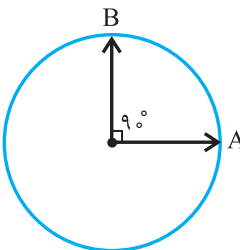
$$y - 4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

کار در کلاس ۱



دوچرخه‌سواری در یک مسیر دایره‌ای شکل، از نقطه A طبق شکل رو به رو، با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. او یک دور این دایره را در ۳ دقیقه طی می‌کند.

۱ دوچرخه‌سوار، $\frac{1}{4}$ این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایره بالا با یک نقطه مشخص کنید.



گفته شده یک دور کامل را در ۳ دقیقه طی می‌کند و با توجه به ثابت بودن سرعتش می‌توان گفت $\frac{1}{4}$ دایره را در $\frac{3}{4}$ دقیقه یا ۴۵ ثانیه طی می‌نماید. همچنین می‌دانیم اگر یک دور کامل دایره را بپیماید 360° طی کرده حال که گفته $\frac{1}{4}$ دایره را پیموده پس $90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$ را پیموده است.

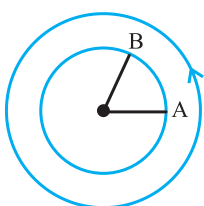
۲ اگر دوچرخه‌سوار پس از ۲۰ ثانیه $(\frac{1}{3}$ دقیقه) به نقطه B رسیده باشد، زاویه بین دو شعاع OA و OB چند درجه است؟

با یک تناسب ساده میزان زاویه طی شده را محاسبه می‌نماییم با توجه به اینکه گفته شده در هر ۳ دقیقه یک دور کامل را طی می‌نماید.

دقیقه	زاویه
۳	۳۶۰
$\frac{1}{3}$	؟

$$\text{زاویه بین دو شعاع } OA \text{ و } OB = \frac{\frac{1}{3} \times 360^\circ}{3} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

در ۲۰ ثانیه زاویه بین OA و OB برابر 40° است.



۳ این دوچرخه‌سوار پس از ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟

چون گفته شده است پس از سه دقیقه یک دور کامل را می‌زند پس می‌توان گفت بعد از سه دقیقه دقیقاً در نقطه شروع خود (یعنی نقطه A) و چنانچه ۲۰ ثانیه دیگر را طی نماید به نقطه B می‌رسد.

۴ اگر یک دوربین فیلم‌برداری از مرکز دایره به دوچرخه سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟

دقیقه	زاویه
۳	۳۶۰°
۱	؟

$$\frac{1 \times 360^\circ}{3} = 120^\circ = \text{تعداد چرخش در یک دقیقه}$$

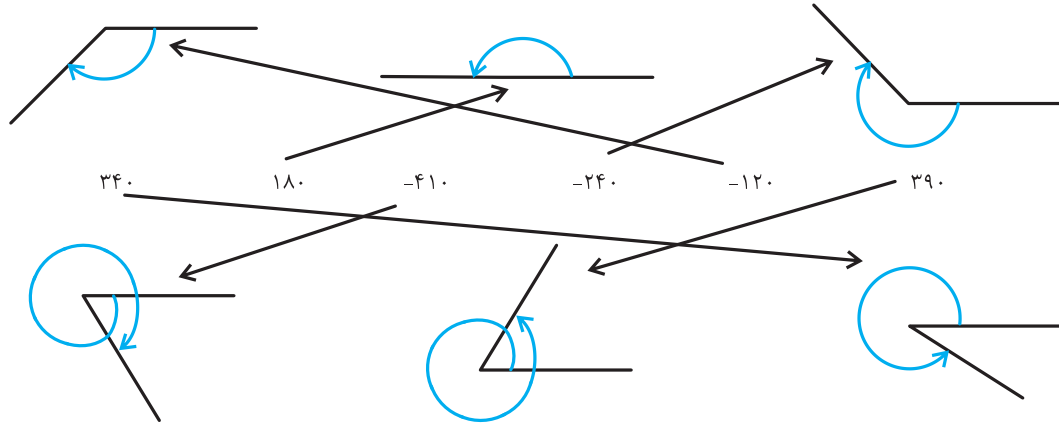
بدیهی است در هر دقیقه 120° ($\frac{1}{3}$ دایره) می‌چرخد.

۵ جدول زیر را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

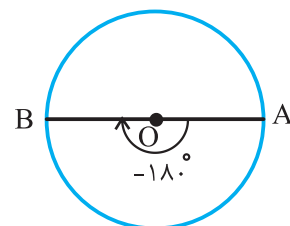
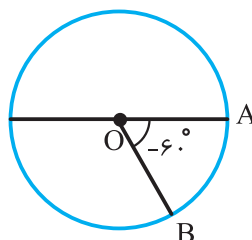
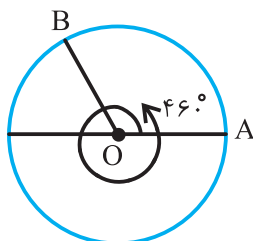
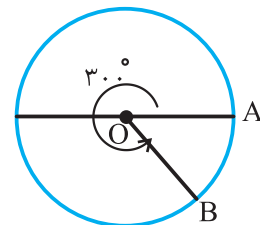
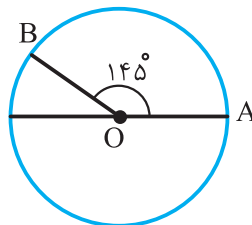
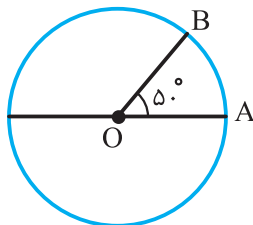
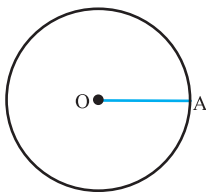
زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۴	۵	۶/۵	۷	۱۳
زاویه چرخش دوربین	$2 \times 120 = 240^\circ$	$4 \times 120^\circ = 480^\circ$	$5 \times 120^\circ = 600^\circ$	$6/5 \times 120^\circ = 780^\circ$	$7 \times 120^\circ = 840^\circ$	$13 \times 120^\circ = 1560^\circ$

مسائل

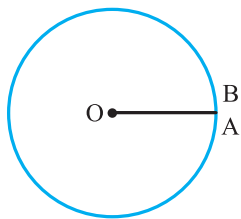
۱ در شکل‌های زیر چند زاویه چرخش رسم شده‌اند. زاویه‌های چرخش داده شده را به شکل‌های صحیح آن وصل کنید.



۲ در دایره رو به رو، نقطه A مبدأ در نظر گرفته شده است. نقاط متناظر زاویه‌های ۱۴۵ و ۵۰ و ۳۰۰ و ۴۶۰ و -۶۰ و -۱۸۰ درجه را روی این دایره نشان دهید.

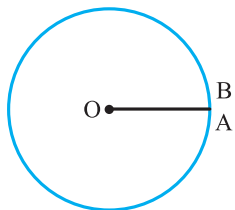


۳ وضعیت دو نیم خط که زاویه چرخش آنها صفر درجه است چگونه است؟
بر هم منطبق می‌باشند.

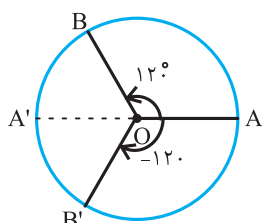


۴ اگر دونه‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای شکل در جهت مثبت بدود، زاویه چرخش او نسبت به نقطه شروع چند درجه است؟

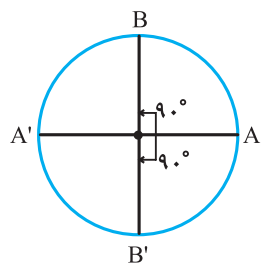
این دونه $1800^\circ = 5 \times 360^\circ$ را طی کرده است. اما چون دایره است می‌توان گفت چون مضربی از 360° است به همان جای اول خود بازگشته است در واقع زاویه‌ی آن از نقطه $\hat{A}$ صفر درجه است.



۵ یک دایره و یک مبدأ روی آن انتخاب کنید. نقاط متناظر دو زاویه چرخش 120° و -120° درجه را روی آن بیابید. از لحاظ هندسی، این نقاط چه وضعیتی نسبت به هم دارند. دو زاویه قرینه دیگر مثال بزنید و وضعیت نقاط متناظر آنها نسبت به هم را توصیف کنید. آیا این وضعیت برای هر دو زاویه که قرینه هم باشند برقرار است؟



از لحاظ هندسی این دو خط قرینه یکدیگر نسبت به خط AA' هستند.



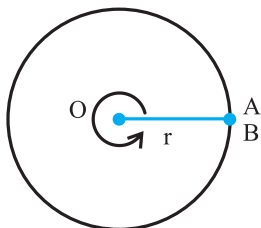
به عنوان مثال می‌توان زاویه 90° و -90° را نیز مثال زد.

فعالیت ۱



دایره ای را به شعاع r در نظر بگیرید و روی آن نقطه A را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید.

۱ اگر از مبدأ، در جهت مثبت، شروع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل، زاویه چرخش چند درجه است؟ مسافت طی شده چقدر است؟
الف) زاویه چرخش 360° است.
ب) مسافت طی شده محیط دایره است که برابر است: $2\pi r$



۲ به ازای هر یک درجه زاویه چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

با یک تناسب ساده داریم:

$$\text{مسافت طی شده به ازای یک درجه زاویه چرخش} = \frac{1 \times 2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$$

زاویه	مسافت طی شده
360°	$2\pi r$
۱	؟

۳ اگر D ، زاویه چرخش برحسب درجه و L ، مسافت طی شده باشد، نسبت $\frac{L}{D}$ چقدر است؟

مسافت طی شده	زاویه
$2\pi r$	360°
L	D

بار دیگر تناسب را می‌نویسیم.

$$L = \frac{D \times 2\pi r}{360} \Rightarrow \frac{L}{D} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$$

۴ رابطه‌ای بنویسید که D را برحسب L بیان کند و رابطه‌ای بنویسید که L را برحسب D بیان کند.

$$D = \frac{360 \times L}{2\pi r} \Rightarrow D = \frac{180 \times L}{\pi r}, \quad L = \frac{D \times \pi r}{180}$$

کار در کلاس ۲

۱ زاویه‌های 30° و 45° و 60° و 90° درجه را برحسب رادیان بنویسید.

الف) $R = \frac{\pi}{180} \times 30 = \frac{\pi}{6}$

ب) $R = \frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi}{4}$

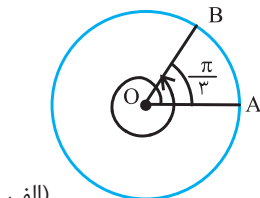
پ) $R = \frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi}{3}$

ت) $R = \frac{\pi}{180} \times 90 = \frac{\pi}{2}$

۲ در جدول زیر تعدادی زاویه برحسب درجه و رادیان داده شده است. معادل آنها را برحسب واحد دیگر بیابید و جدول را کامل کنید.

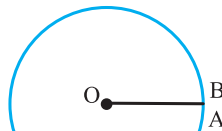
درجه	55°	$\frac{11 \times 180}{3} = 660^\circ$	-270°	3600°	$180 \times \frac{-15}{4} = -675^\circ$
رادیان	$\frac{\pi}{180} \times 55 = \frac{11\pi}{36}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{\pi}{180} \times -270 = -\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{180} \times 3600 = 20\pi$	$\frac{-15\pi}{4}$

۳ نقاط متناظر زاویه‌های $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{-5\pi}{6}$ ، π ، $-\pi$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، 2π ، $\frac{-\pi}{3}$ ، 0 ، $\frac{7\pi}{3}$ را روی دایره زیر مشخص کنید.



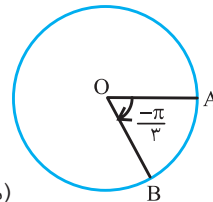
الف)

$$7\frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3} = 420^\circ$$



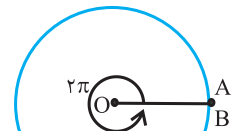
ب)

$$0^\circ = 0R$$



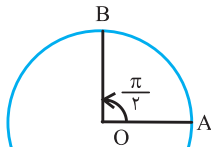
پ)

$$-\frac{\pi}{3} = -60^\circ$$



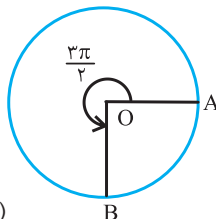
ت)

$$2\pi = 360^\circ$$



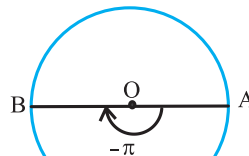
ث)

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$



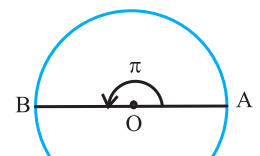
ج)

$$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$



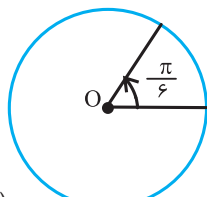
چ)

$$-\pi = -180^\circ$$



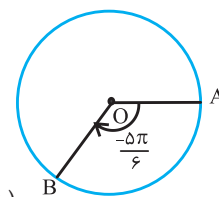
ح)

$$\pi = 180^\circ$$



د)

$$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

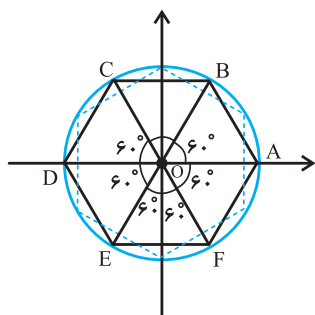


خ)

$$-\frac{5\pi}{6} = -150^\circ$$

۴ در شکل زیر یک شش ضلعی منتظم را داخل دایره رسم کرده‌ایم به گونه‌ای که یکی از رأس‌های آن روی نقطه متناظر زاویه صفر است (نقطه A).

الف) بقیه رئوس این چندضلعی، متناظر چه زاویه‌هایی (بر حسب درجه) هستند؟



$$\hat{A}OB = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\hat{A}OC = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$\hat{A}OD = 180^\circ = \pi$$

$$\hat{A}OE = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$$

$$\hat{A}OF = 300^\circ = \frac{5\pi}{3}$$

ب) اگر شش ضلعی بالا به اندازه ۳۰ درجه در جهت مثبت دوران کند به طوری که رأس A به A' انتقال یابد، رئوس این چندضلعی جدید متناظر چه زاویه‌هایی هستند؟
تمام زاویه‌های آن به اندازه ۳۰ درجه خلاف عقربه‌های ساعت دوران پیدا خواهند کرد.

$$\hat{A}OB = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ, \quad \hat{A}OC = 120^\circ + 20^\circ = 140^\circ, \quad \hat{A}OD = 180^\circ + 20^\circ = 200^\circ$$

$$\hat{A}OE = 240^\circ + 20^\circ = 260^\circ, \quad \hat{A}OF = 300^\circ + 20^\circ = 320^\circ$$

مسائل

۱ زاویه‌های ۱۵، ۱۹۰، ۵۳۰ و ۱۰۰۰ درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

با توجه به فرمول $R = \frac{\pi}{180} \times D$ داریم.

$$\text{الف)} \quad 15^\circ : \frac{\pi}{180} \times 15^\circ = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{ب)} \quad 190^\circ : \frac{\pi}{180} \times 190^\circ = \frac{19\pi}{18}$$

$$\text{پ)} \quad 53^\circ : \frac{\pi}{180} \times 53^\circ = \frac{53\pi}{180}$$

$$\text{ت)} \quad -1000^\circ : \frac{\pi}{180} \times (-1000^\circ) = -\frac{50\pi}{9}$$

۲ زاویه‌های $\frac{-14\pi}{5}$ ، $\frac{-8\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{7}$ را بر حسب درجه بنویسید.

با توجه به فرمول $D = \frac{180}{\pi} \times R$ داریم.

$$\text{الف)} \quad \frac{\pi}{7} : \frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{7} = \frac{180}{7} \approx 25.71^\circ$$

$$\text{ب)} \quad \frac{4\pi}{3} : \frac{180}{\pi} \times \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

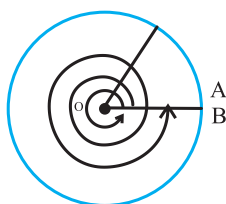
$$\text{پ)} \quad \frac{-8\pi}{3} : \frac{180}{\pi} \times \frac{-8\pi}{3} = -480^\circ$$

$$\text{ت)} \quad \frac{-14\pi}{5} : \frac{180}{\pi} \times \left(-\frac{14\pi}{5}\right) = -504^\circ$$

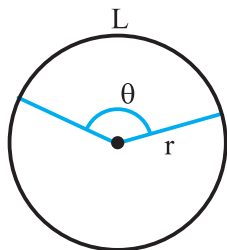
نکته: راحت‌ترین روش برای حل این مثال این است که به جای π عدد 180° را قرار دهیم یعنی برای تبدیل رادیان به درجه چنانچه π داشت به جای π آن عدد 180° را قرار دهیم مثلاً $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

۳ اگر یک نیم خط بعد از چرخش روی حالت اول خود منطبق شود، توضیح دهید زاویه چرخش آن بر حسب رادیان چه مقداری می‌تواند باشد؟

باید مضارب از 2π رادیان (360°) باشد.



... و 8π یا 6π یا 4π یا 2π یا ۰



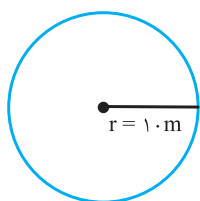
۴ در یک دایره به شعاع r ، اگر زاویه یک کمان برحسب رادیان، θ باشد، طول این کمان برحسب r و θ چقدر است؟
می‌دانیم محیط کامل یک دایره از فرمول $\rho = 2\pi r$ به دست می‌آید و می‌دانیم یک دایره کامل $360^\circ = 2\pi$ است.

محیط	زاویه (رادیان)
$2\pi r$	2π
L	θ

$$L = \frac{\theta \times 2\pi r}{2\pi} = \theta \times r$$

$$L = \theta \times r$$

۵ در یک چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیه خود، به اندازه ۱ رادیان چرخیده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟
اگر مسافت طی شده توسط کابین ۷۰ متر باشد، زاویه چرخش کابین برحسب رادیان و درجه چقدر است؟



$$L = \theta \times r \Rightarrow L = 1 \times 10 = 10 \text{ m}$$

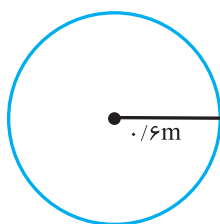
(الف)

$$70 = \theta \times r \Rightarrow 70 = \theta \times 10 \Rightarrow \theta = 7$$

$$D = \frac{180}{\pi} \times R \Rightarrow D = \frac{180}{\pi} \times 7 = \frac{1260}{\pi} = \frac{1260}{3.14} = 401.27^\circ \approx 401^\circ$$

(ب)

۶ طول پره‌های یک چرخ، ۵/۰ متر است. این چرخ را روی زمین بدون لغزش می‌چرخانیم. با مثبت در نظر گرفتن جهت چرخش، (الف) پس از طی ۱۰۰ متر مسافت، زاویه چرخش یکی از پره‌ها نسبت به حالت اولیه آن (برحسب درجه و رادیان) چقدر است؟



$$L = \theta \times r$$

$$100 = \theta \times 0.5 \Rightarrow \theta = \frac{100}{0.5} R$$

$$\theta = \frac{180}{\pi} \times \frac{100}{0.5} = \frac{36000}{\pi}$$

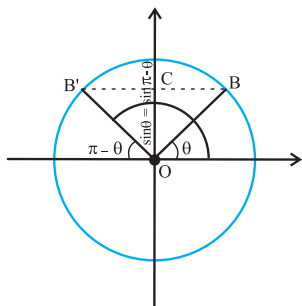
(ب) اگر یکی از پره‌ها ۳۰۰ درجه چرخش کرده باشد، چرخ چند متر طی کرده است؟
ابتدا درجه را به رادیان تبدیل می‌نماییم.

$$R = \frac{\pi}{180} \times D \Rightarrow \frac{\pi}{180} \times 30000 = \frac{\pi \times 50}{3} = \frac{50\pi}{3}, \quad L = \theta \times r \Rightarrow L = \frac{50\pi}{3} \times 0.5 = 25\pi$$

فعالیت ۲

۱ فرض کنید θ یک زاویه تند برحسب رادیان باشد، $\pi - \theta$ چه نوع زاویه‌ای است؟
اگر θ یک زاویه تند باشد $\pi - \theta$ یک زاویه باز یا منفرجه می‌باشد.

۲ با رسم شکل، وضعیت نقاط متناظر دو زاویه θ و $\pi - \theta$ روی دایره مثلثاتی را نسبت به هم و محور سینوس‌ها مشخص کنید.

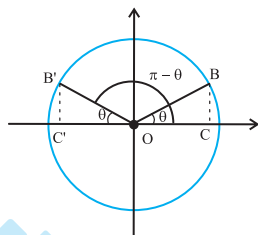


۳ سینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = oc$$

سینوس این دو زاویه با هم برابر می‌باشد.

۴ کسینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟



$$\cos \theta = \cos(\pi - \theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$$

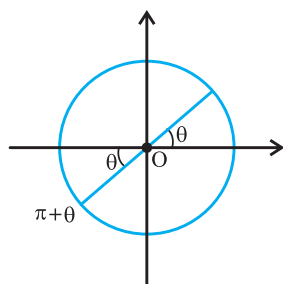
کار در کلاس ۳

۱ اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایره مثلثاتی باشد، نقطه متناظر زاویه $\pi + \theta$ در کدام ربع قرار دارد؟
در ربع سوم قرار دارد.

۲ وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $\pi + \theta$ نسبت به هم چگونه است؟
قرینه نسبت به مرکز دایره هستند.

۳ طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟
هم طول و هم عرض $\pi + \theta$ قرینه نقطه θ است.

۴ نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟
سینوس و کسینوس هر دو منفی، تانژانت و کتانژانت هر دو مثبت



کار در کلاس ۴

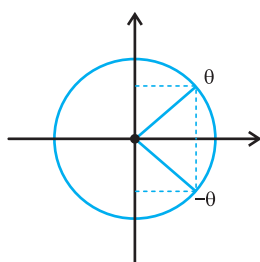
۱ اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایره مثلثاتی باشد، نقطه متناظر زاویه $-\theta$ در کدام ربع قرار دارد؟
در ربع چهارم قرار دارد.

۲ وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $-\theta$ نسبت به هم چگونه است؟
نسبت به محور xها قرینه یکدیگرند.

۳ طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟
طول این نقاط با یکدیگر برابر است اما عرض آنها قرینه یکدیگرند.

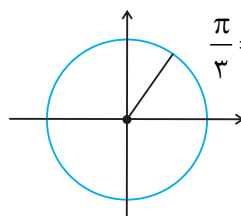
۴ نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta$$



کار در کلاس ۵

۱ در شکل رو به رو، نقاط متناظر زاویه‌های داده شده در جدول را روی دایره مثلثاتی مشخص کنید، سپس جدول را کامل کنید.



تمام نقاط داده شده همان $\frac{\pi}{3}$ می‌باشند. $\frac{\pi}{3} = -2\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{\pi}{3} - 4\pi$

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} + 2\pi$	$\frac{\pi}{3} + 4\pi$	$\frac{\pi}{3} - 2\pi$	$\frac{\pi}{3} - 4\pi$
نسبت مثلثاتی					
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

۲ اگر به یک زاویه مانند θ (برحسب رادیان)، مضرب صحیحی از 2π را اضافه یا کم کنیم نقطه متناظر زاویه جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

همان نقطه قبل به دست می‌آید. زیرا 2π را اگر اضافه نماییم مانند این است که یک دور کامل را طی نماییم و به نقطه اول خود باز گردیم.

۳ با ذکر دلیل، نتیجه بگیرید اگر به زاویه‌ای (برحسب رادیان)، مضارب صحیح 2π را اضافه یا کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند. طبق نکته‌ای که در مثال ۲ گفته شد، می‌توان گفت اگر مضارب صحیح از 2π را به زاویه خودمان اضافه یا کم کنیم با توجه به اینکه نقطه‌ی مذکور بر روی دایره همان نقطه قبل (بدون اضافه کردن مضارب 2π) بدست می‌آید لذا طول و عرض آن تغییر نکرده است پس می‌توان گفت، مقدار $\sin \theta$ و $\cos \theta$ نیز همان مقادیر قبلی است.

۴ سینوس و کسینوس زاویه‌های $\frac{14\pi}{3}$ و $\frac{-25\pi}{6}$ رادیان را حساب کنید.

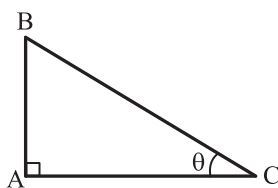
الف) $\sin(\frac{14\pi}{3}) = \sin(4\pi + \frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\frac{14\pi}{3}) = \cos(4\pi + \frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

ب) $\sin(\frac{-25\pi}{6}) = \sin(-4\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$\cos(\frac{-25\pi}{6}) = \cos(-4\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

فعالیت ۳



مثلث قائم‌الزاویه ABC را با اندازه تند θ در نظر بگیرید.

۱ طول ضلع AB را برحسب $\sin \theta$ بنویسید.

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC} \quad AB = BC \sin \theta$$

۲ طول ضلع AC را برحسب $\cos \theta$ بنویسید.

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} \quad AC = BC \cos \theta$$

۳ در این مثلث، $\tan \theta$ را برحسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ به دست آورید.

صورت و مخرج کسر را بر BC تقسیم می‌نماییم.

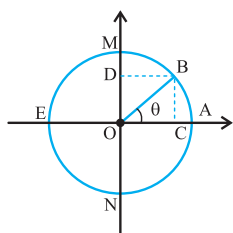
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

۴ به کمک رابطهای که در (۳) به دست آوردید، برای تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه پیشنهادی ارائه کنید.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{می‌توان برای هر زاویه دلخواهی تعمیم داد:}$$

البته نکته بسیار مهم این است چون مقدار کسری است پس مخرج کسر نباید صفر بشود یعنی $\cos \alpha \neq 0$ به عبارتی زاویه‌های $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ نباشند.

فعالیت ۴



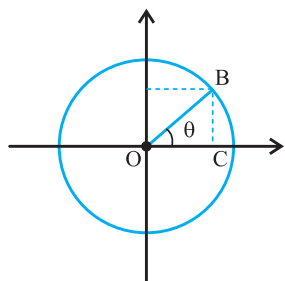
یک دایره مثلثاتی مانند شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. در این شکل، زیر B نقطه متناظر زاویه θ است و C، تصویر B روی محور کسینوس‌ها و D، تصویر B روی محور سینوس‌ها است.

وقتی θ در بازه‌های $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ و $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ تغییر می‌کند، چگونگی تغییر مکان نقطه C روی محور کسینوس‌ها و نقطه D روی محور سینوس‌ها و مقدارهای $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را در جدول زیر مشخص کنید. در جدول چند مورد مشخص شده است.

مقدار زاویه θ	در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	در بازه $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	در بازه $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	در بازه $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
مکان نقطه C	روی پاره‌خط OA قرار دارد	روی پاره‌خط OE قرار دارد	روی پاره‌خط OE قرار دارد	روی پاره‌خط OA قرار دارد
مقدار $\cos \theta$	در بازه $[0, 1]$ قرار دارد.	در بازه $[-1, 0]$ قرار دارد.	در بازه $[-1, 0]$ قرار دارد.	در بازه $[0, 1]$ قرار دارد.
مکان نقطه D	روی پاره‌خط OM قرار دارد	روی پاره‌خط OM قرار دارد	روی پاره‌خط ON قرار دارد	روی پاره‌خط ON قرار دارد
مقدار $\sin \theta$	در بازه $[0, 1]$ قرار دارد.	در بازه $[0, 1]$ قرار دارد.	در بازه $[-1, 0]$ قرار دارد.	در بازه $[-1, 0]$ قرار دارد.

کار در کلاس ۶

۱ زاویه تند θ را در ربع اول دایره مثلثاتی در شکل رو به رو در نظر بگیرید.



با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه OCB، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{OB}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{OC}{OB}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{BC^2}{OB^2} + \frac{OC^2}{OB^2} = \frac{BC^2 + OC^2}{OB^2}$$

می‌دانیم مثلث قائم‌الزاویه طبق قضیه فیثاغورث $OB^2 = BC^2 + OC^2$ پس به جای $BC^2 + OC^2$ در صورت OB^2 را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{BC^2 + OC^2}{OB^2} = \frac{OB^2}{OB^2} = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

۲ تساوی بالا برای سایر زاویه‌ها نیز برقرار است. درستی این تساوی را برای چند زاویه در ربع‌های دیگر بررسی کنید.

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

۳ اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به طوری که $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{4}{5}$$

چون θ در ناحیه دوم است پس $\cos \theta = -\frac{4}{5}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

مسائل

۱ در جدول‌های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه‌های داده شده در کدام ربع از دایره مثلثاتی قرار دارند.

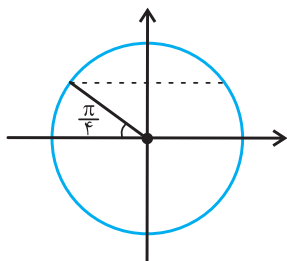
زاویه θ برحسب درجه	-۸۰	۱۴۰	۲۸۰	۳۶۳
مکان زاویه θ	در ربع چهارم	در ربع دوم	در ربع چهارم	در ربع اول
زاویه θ برحسب رادیان	$-\frac{2\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{12\pi}{5}$
مکان زاویه θ	در ربع دوم	در ربع اول	در ربع اول	در ربع اول

۲ با تعیین مکان زاویه $-\frac{5\pi}{4}$ تعیین کنید کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) < 0$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4}) < 0$ ب) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) < 0$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4}) > 0$

پ) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) < 0$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4}) > 0$ ت) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) > 0$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4}) < 0$

گزینه «ب» صحیح است.



$$\begin{aligned} \sin(-\frac{5\pi}{4}) &= -\sin \frac{5\pi}{4} \\ &= -\sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = \\ &= -[-\sin \frac{\pi}{4}] = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ \cos(-\frac{5\pi}{4}) &= \cos(\frac{5\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \end{aligned}$$

۳ جدول زیر را با مشخص کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها کامل کنید در هر مورد مثالی بزنید.

با توجه به دایره مثلثاتی مقدار $\sin$ و $\cos$ را از نظر علامت تعیین می‌کنیم سپس با توجه به فرمول $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ تانژانت را تعیین علامت کرده.

θ	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
علامت نسبت مثلثاتی				
علامت $\sin \theta$	+	+	-	-
علامت $\cos \theta$	+	-	-	+
علامت $\tan \theta$	+	-	+	-

۴ مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

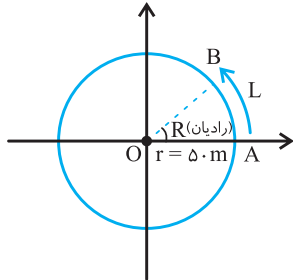
ب) $\tan^4 30^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{9}$

پ) $(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2 = \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 1 + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 1 + 2 \left(\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} \times \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} \right) =$

$$1 + 2 \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{4}} = 1 + 2 \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{4}} = 1 + 2 \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{4}} = 1 + 2 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{8}} = 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

ت) $\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ = 1$

۵) دوچرخه‌سواری روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۵۰ متر، با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه از نقطه A شروع به حرکت می‌کند. دو محور عمود بر هم (مانند شکل) در این دایره رسم می‌کنیم.



الف) اندازه زاویه چرخش (بر حسب رادیان) دوچرخه‌سوار را بر حسب زمان (ثانیه) به دست آورید.

$$\begin{cases} L & rR \\ L & Vt \end{cases} \Rightarrow Vt = rR \Rightarrow 2 \times t = 50 \times R \Rightarrow t = 25R \Rightarrow R = \frac{t}{25}$$

ب) اگر دوچرخه سوار پس از ۳۰ دقیقه حرکت بایستد، در کدام ربع از دایره ایستاده است؟

$$R = \frac{t}{25} = \frac{30 \times 60}{25} = 72 \text{ (رادیان)}$$

$$D = \frac{180}{\pi} \times R \Rightarrow \frac{180}{\pi} \times 72 = \frac{12960}{3.14} = 4127^\circ$$

اگر دوچرخه‌سوار ۱۱ دور کامل بزند پس در ناحیه دوم قرار دارد.

۶) زاویه θ در ربع سوم است و $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \frac{1}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{24}{25} \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

چون در ناحیه سوم قرار گرفته $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$$

۷) اگر برای زاویه θ داشته باشیم $\sin \theta = \frac{-2}{3}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورد؟ چرا؟ چه اطلاعات دیگری را هم باید بدانیم؟

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

نمی‌توان مقدار $\cos \theta$ را دقیقاً به دست آورد چون همانطور که به دست آوردیم $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، می‌بایست ناحیه‌ای که θ در آن قرار دارد نیز مشخص باشد تا در مورد علامت‌های آنها نیز اظهار نظر کنیم.

۸) نشان دهید برای زاویه دلخواه θ تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta, \tan(\pi + \theta) = \tan \theta, \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

الف) $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

ب) $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta \Rightarrow \tan(\pi + \theta) = \frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$

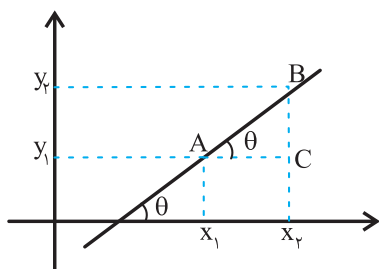
پ) $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$$

۹ دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آنها ۱- است.

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \dots = -1$$

فعالیت ۵



یک خط دلخواه به معادله $y = ax + b$ با شیب مثبت ($a > 0$) در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ، دو نقطه از این خط هستند و زاویه این خط با محور طول‌ها برابر θ است.

۱ شیب این خط را برحسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

$$a = \frac{BC}{AC} = \text{شیب خط}$$

۲ در مثلث قائم‌الزاویه ABC طول اضلاع AC و BC را برحسب مختصات A و B به دست آورید.

$$BC = y_2 - y_1, \quad AC = x_2 - x_1$$

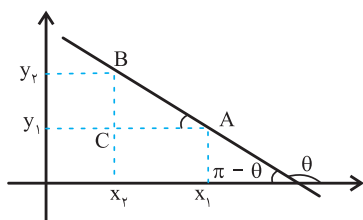
۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABC، تانژانت زاویه θ را برحسب مختصات A و B به دست آورید.

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویه آن با محور افقی به دست می‌آورید؟

با هم برابرند در واقع می‌توان گفت زاویه برخورد خط گذرنده از دو نقطه A و B با محور طول‌ها برابر شیب خط آن می‌باشد.

فعالیت ۶



یک خط دلخواه به معادله $y = ax + b$ با شیب منفی ($a < 0$) در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ، دو نقطه از این خط هستند و زاویه این خط با محور طول‌ها برابر θ است.

۱ شیب این خط را برحسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

$$m = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۲ در مثلث قائم‌الزاویه ABC طول اضلاع AC و BC را برحسب مختصات A و B به دست آورید.

$$BC = y_2 - y_1, \quad AC = x_2 - x_1$$

۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABC، تانژانت زاویه $\pi - \theta$ (زاویه A) را برحسب مختصات A و B به دست آورید.

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AC}$$

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و $\tan(\pi - \theta)$ به دست می‌آورید؟

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۵ با استفاده از (۴) چه رابطه‌ای بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها به دست می‌آورید؟

برای هر خط d به شیب m که با قسمت مثبت محور طول‌ها زاویه θ می‌سازد می‌توان گفت $m = \tan \theta$

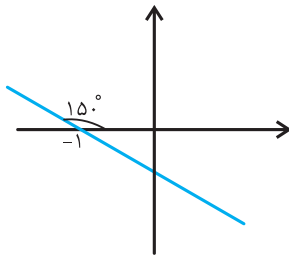


۱ زاویه بین خط به معادله $y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$ و محور طول‌ها، چند رادیان است؟

$$y = \sqrt{3}x + \sqrt{2} \quad m = \sqrt{3}$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۲ معادله خطی را بنویسید که در نقطه به طول -1 ، محور طول‌ها را قطع می‌کند و با آن زاویه 150° درجه می‌سازد.



$$m = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

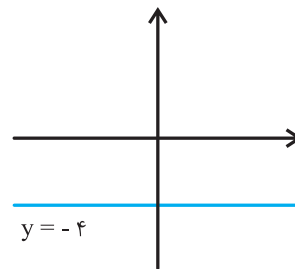
$$\text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1) \Rightarrow$$

$$\text{معادله: } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۳ شیب خط $y = -4$ چقدر است؟ زاویه بین خط $y = -4$ و محور طول‌ها چقدر است؟

زاویه بین خط $y = -4$ و محور طول‌ها صفر است.

$$\text{شیب } m = \tan 0 = 0$$

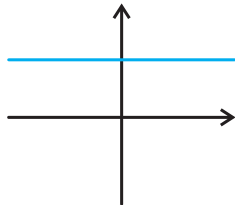


مسائل



۱ در شکل‌های زیر زاویه بین خط و محور طول‌ها و شیب خط را به دست آورید

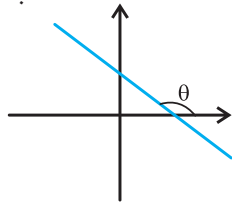
الف)



$$\theta = 0$$

$$m = 0$$

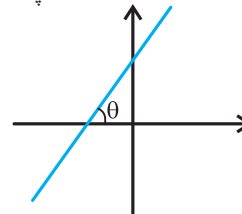
ب)



$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

$$m < 0$$

پ)



$$0 < \theta < 90^\circ$$

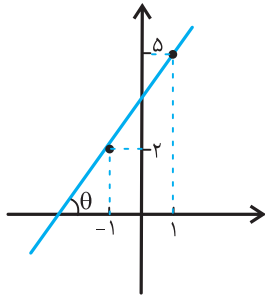
$$m > 0$$

۲ معادله خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویه 20° درجه بسازد و از نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد. (برای محاسبه شیب خط می‌توانید از رسم به کمک نقاله یا ماشین حساب استفاده کنید).

$$m = \tan 20^\circ = 0.36$$

$$\text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = 0.36(x + 1) \Rightarrow y = 0.36x - 1.64$$

۳ خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟ (از رسم خط و نقله استفاده کنید).



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{1 - (-1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$m = \tan(\theta) = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta \approx 56.3^\circ \quad (\text{با ماشین حساب})$$

۴ خط به معادله $\sqrt{3}x - 3y = 4$ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع می‌کند و چه زاویه‌ای با آن می‌سازد؟ برای به دست آوردن نقطه برخورد خط با محور طول‌ها $y = 0$ قرار می‌دهیم.

$$2x + 3y = 4 \xrightarrow{y=0}$$

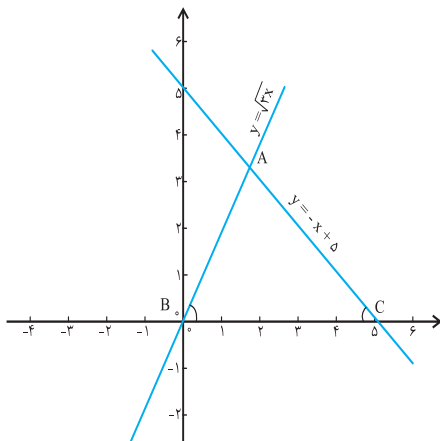
$$\sqrt{3}x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{-x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \theta = m = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

۵ از برخورد دو خط با معادله‌های $y = \sqrt{3}x$ و $y = -x + 5$ و محور طول‌ها، یک

مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را برحسب رادیان به دست آورید.



$$\text{نقطه برخورد دو خط: } \sqrt{3}x = -x + 5 \Rightarrow x(\sqrt{3} + 1) = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{3} + 1}$$

$$y = \sqrt{3}x \quad \text{شیب خط} = \sqrt{3} = \tan B \Rightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$y = -x + 5 \quad \text{شیب خط} = -1 \Rightarrow \tan C_1 = -1 \Rightarrow C_1 = -135^\circ \Rightarrow C_2 = 45^\circ$$

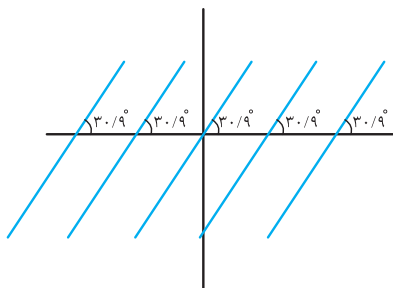
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$A + 60 + 45 = 180 \Rightarrow A = 180 - 105 = 75^\circ$$

۶ خط‌های به معادله $3x - 5y = c$ با هم (موازی‌اند / متقاطع‌اند) زاویه این خط‌ها با محور طول‌ها برحسب درجه و رادیان به طور تقریبی چقدر است؟

$$\text{شیب خط} = \frac{-x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \Rightarrow m = \tan \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = 30.9^\circ$$

چون تمام خطوط با هم موازی هستند پس می‌توان گفت زاویه برخورد همه آنها با محور طول‌ها همین است.



پودمان چهارم لگاریتم و خواص آن

لگاریتم

تعریف لگاریتم: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ باشد، و اعداد حقیقی b و c به گونه‌ای باشند که $a^b = c$ آن‌گاه c را لگاریتم b در مبنای a می‌نامند و با $\log_a b = c$ نشان می‌دهند یعنی $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

$$a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c$$

به طور خلاصه: رابطه بین توان و لگاریتم به صورت $a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c$ رو به رو است:

مثال: تساوی‌های زیر را به صورت لگاریتم بنویسید.

حل:

الف) $2^3 = 8 \Rightarrow 3 = \log_2 8$

ب) $a^x = y \Rightarrow x = \log_a y$

ج) $5^x = 125 \Rightarrow x = \log_5 125$

مثال: تساوی‌های زیر را به صورت توان دار بنویسید.

الف) $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$

ب) $\log_{10} 1000 = 3 \Rightarrow 10^3 = 1000$

ج) $\log_5 25 = x \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2$

نکته‌ها:

* لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود یعنی عبارت $\log b$ فقط برای $b > 0$ تعریف می‌شود.

مثلاً $\log_a(-3)$ و $\log_a 0$ تعریف نشده است.

* مبنای لگاریتم عددی مثبت و مخالف یک است.

مثلاً $\log_a a$ و $\log_{-a} a$ تعریف نمی‌شوند.

مثال: اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد مقادیر $\log_a a$ و $\log_a 1$ را بیابید.

حل: فرض کنیم $\log_a a = x$ آنگاه $a^x = a$ را می‌یابیم.

فرض می‌کنیم $\log_a 1 = y$ آنگاه $a^y = 1$ را می‌یابیم.

$$\log_a a = x \Rightarrow a^x = a \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = y \Rightarrow a^y = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \log_a 1 = 0$$

نکته:

برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند a داریم:

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0$$

$$\log_{10} 10 = 1, \quad \log_2 2 = 1, \quad \log_3 1 = 0, \quad \log_4 1 = 0$$

به طور مثال:

تذکر: معمولاً برای نمایش لگاریتم در مبنای ۱۰، پایه لگاریتم را نمی‌نویسند.

یعنی به جای $\log_{10} x$ می‌نویسند $\log x$.

نکته:

$$\log 10 = \log_{10} 10 = 1 \quad \text{زیرا} \quad \log_{10} 10 = 1$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\log_2 16 =$

ب) $\log_{10} 1000 =$

ج) $\log_5 \frac{1}{125} =$

حل: الف) فرض می‌کنیم $\log_2 16 = x$ باشد، $2^x = 16$ را می‌یابیم:

$$\log_2 16 = x \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \log_2 16 = 4$$

ب) فرض می‌کنیم $\log_{10} 1000 = x$ باشد مقدار x را می‌یابیم:

$$\log_{10} 1000 = x \Rightarrow \log_{10} 1000 = x \Rightarrow 10^x = 1000 \Rightarrow x = 3$$

ج) فرض می‌کنیم $\log_5 \frac{1}{125} = x$ مقدار x را می‌یابیم:

$$\log_5 \frac{1}{125} = x \Rightarrow 5^x = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^x = \frac{1}{5^3} = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$$

خواص لگاریتم

در این قسمت با خواص، ویژگی‌های لگاریتم آشنا می‌شویم و به کمک آن‌ها حاصل لگاریتم را ساده‌تر پیدا می‌کنیم.
(۱) در ویژگی مقدماتی لگاریتم:

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0$$

$$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$$

(۲) لگاریتم حاصلضرب دو عدد با مجموع لگاریتم‌های آن دو عدد برابر است.

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد خاصیت بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\log(a + b) \neq \log a + \log b \quad \text{تذکر مهم: برای هر } a \text{ و } b \text{ مثبت داریم:}$$

(۳) لگاریتم تقسیم دو عدد برابر است با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم‌علیه، یعنی برای $a, b > 0$ داریم:

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد داریم:

$$(a, b > 0) \quad \log(a - b) \neq \log a - \log b \quad \text{تذکر مهم:}$$

$$\log_b a^n = n \log_b a \quad \text{(۴) لگاریتم توان را به پشت می‌اندازد یعنی}$$

(۵) لگاریتم یک عدد در پایه غیر ۱۰ را می‌توانیم به صورت تقسیم لگاریتم دو عدد در پایه ۱۰ بنویسیم. یعنی برای $a, b > 0$ و $b \neq 1$ داریم:

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\log 1000 = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3 \times 1 = 3$

ب) $\log 4 + \log 25 = \log(4 \times 25) = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \times 1 = 2$

پ) $\log \sqrt[3]{125} = \log_5 \sqrt[3]{5^3} = \log_5 5^{\frac{3}{3}} = \frac{3}{3} \log_5 5 = \frac{3}{3} \times 1 = \frac{3}{3}$ **یادآوری:** $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

ت) $3 \log \sqrt{50} + 2 \log \sqrt{2} = \log(\sqrt{50})^3 + \log(\sqrt{2})^2 = \log 50 + \log 2 = \log(50 \times 2) = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$

ث) $\log 0.01 = \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - \log 10^2 = -2 \log 10 = -2 \times 1 = -2$

ج) $\log 300 - \log 3 = \log \frac{300}{3} = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \times 1 = 2$

د) $\frac{\log 6 + \log 3}{\log 3 + \log \sqrt{2}} = \frac{\log(6 \times 3)}{\log(3 \times \sqrt{2})} = \frac{\log 18}{\log \sqrt{18}} = \frac{\log 18}{\log(18)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 18}{\frac{1}{2} \log 18} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

ه) $\log \frac{1}{3} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{99}{100} = \log\left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100}\right) = \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - \log 10^2 = -2 \log 10 = -2$

و) $\log_6 2\sqrt{3} + \log_6 3\sqrt{2} = \log_6 (2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}) = \log_6 6\sqrt{6} = \log_6 (6^1 \times 6^{\frac{1}{2}}) = \log_6 6^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_6 6 = \frac{3}{2}$

ز) $\log_8 (\log_3 (\log_2 512)) = \log_2 512 = \log_2 2^9 = 9 \log_2 2 = 9$

$\log_8 (\log_3 (\log_2 512)) = \log_8 (\log_3 9) = \log_8 (\log_3 3^2) = \log_8 (2 \log_3 3) = \log_8 2 = \frac{\log 2}{\log 8} = \frac{\log 2}{\log 2^3} = \frac{\log 2}{3 \log 2} = \frac{1}{3}$

نکته:

رابطه بین $\log 2$ و $\log 5$:

$$\log 5 = 1 - \log 2, \quad \log 2 = 1 - \log 5$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

زیرا:

مثال: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد حاصل عبارت‌های زیر را بر حسب a و b بنویسید.

حل:

الف) $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$

ب) $\log \frac{25}{27} = \log 25 - \log 27 = \log 5^2 - \log 3^3 = 2 \log 5 - 3 \log 3 = 2(1 - \log 2) - 3b = 2(1 - a) - 3b = 2 - 2a - 3b$

ج) $\log 12\sqrt{5} = \log 12 + \log \sqrt{5} = \log 2^2 \times 3 + \log 5^{\frac{1}{2}} = \log 2^2 + \log 3 + \frac{1}{2} \log 5 = 2 \log 2 + b + \frac{1}{2}(1 - \log 2)$

$= 2a + b + \frac{1}{2}(1 - a) = 2a + b + \frac{1}{2} - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} + b + \frac{1}{2}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

حل:

الف) $1 + \log_7 3 = \log_7 2 + \log_7 3 = \log_7 (2 \times 3) = \log_7 6$

ب) $2 - \log_4 5 = 2 \log_4 4 - \log_4 5 = \log_4 4^2 - \log_4 5 = \log_4 16 - \log_4 5 = \log_4 \frac{16}{5}$

پ) $\frac{2 \log 5}{3 \log 2} = \frac{\log 5^2}{\log 2^3} = \frac{\log 25}{\log 8} = \log_8 25$

ت) $\frac{1}{2} \log a + 3 \log b - 5 \log c = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^3 - \log c^5 = \log \sqrt{a} \cdot b^3 - \log c^5 = \log \left(\frac{b^3 \sqrt{a}}{c^5} \right)$

مثال: باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی دو برابر می‌شود.

الف) اگر با یک گرم از این باکتری‌ها شروع کنیم مقدار این باکتری پس از ۵ واحد زمانی چند گرم می‌شود؟

پس از ۵ واحد زمانی مقدار باکتری 2^5 یعنی ۳۲ برابر می‌شود و چون ابتدا یک گرم داشتیم بنابراین پس از ۵ واحد زمانی $32 \times 1 = 32$ گرم باکتری داریم.

ب) پس از چند واحد زمانی مقدار باکتری‌ها ۵۱۲ گرم می‌شود.

باید بدانیم که چه توانی از ۲ مساوی ۵۱۲ می‌شود و این همان $\log_2 512$ است.

$\log_2 512 = \log_2 2^9 = 9 \log_2 2 = 9 \times 1 = 9$

بیشتر بدانیم:

۱) $\log_{b^m} a = \frac{1}{m} \log_b a$ ، ۲) $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$ ، ۳) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

۴) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ ، ۵) $\log_b a \times \log_c b = \log_c a$

مثال:

الف) $\log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$

ب) $\log_{\sqrt[3]{9}} \frac{1}{9} = \log_{9^{\frac{1}{3}}} 9^{-2} = \log_{9^{\frac{1}{3}}} 3^{-2} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} \log_3 3 = -\frac{4}{3} \times 1 = -\frac{4}{3}$

ج) $\log_7 32 \times \log_7 7 = \log_7 32 = \log_7 2^5 = 5 \log_7 2 = 5 \times 1 = 5$

فعالیت ۱



۱) فاصله زمین از خورشید تقریباً 149597870.691 km و فاصله ستاره پروکسیما قنطورس تا زمین تقریباً 42431788530 km برابر فاصله زمین تا خورشید است. برای تعیین فاصله این ستاره تا زمین باید از کدام چهار عمل اصلی استفاده کرد؟ حدس می‌زنید برای انجام این عمل چقدر زمان نیاز دارید؟

از ضرب می‌بایست استفاده کرد، بدیهی است برای ضرب دو عدد بزرگ در یکدیگر زمان زیادی لازم است.

۲) ستاره شباهنگ (سیروس) در فاصله تقریباً 377364883 km کیلومتری از زمین است، اگر بخواهیم بدانیم فاصله ستاره شباهنگ از زمین چند برابر فاصله خورشید تا زمین است چه عملی باید انجام دهید؟ حدس می‌زنید زمان انجام این عمل چقدر است؟ می‌بایست فاصله ستاره شباهنگ تا زمین را تقسیم به فاصله زمین تا خورشید بکنیم، بدیهی است بسیار زمان بر است.

n	3^n	حاصل
۰	3^0	۱
۱	3^1	۳
۲	3^2	۹
۳	3^3	۲۷
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۱	3^{11}	۱۷۷۱۴۷
۱۲	3^{12}	۵۳۱۴۴۱
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۱۷	3^{17}	۱۲۹۱۴۰۱۶۳
۱۸	3^{18}	۳۸۷۴۲۰۴۸۹
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۲۷	3^{27}	۷۶۲۵۵۹۷۴۸۴۹۸۷
۲۸	3^{28}	۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۶۱
۲۹	3^{29}	۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳

۳ با استفاده از جدول رو به رو که در آن توان‌هایی از ۳ محاسبه شده است، جاهای خالی را کامل کنید و حاصل را با استفاده از ضرب اعداد توان‌دار بنویسید.

$$۱۲۹۱۴۰۱۶۳ \times ۱۷۷۱۴۷ = 3^{17} \times 3^{11} = 3^{28} \text{ (الف)}$$

$$۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ \div ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ = 3^{29} \div 3^{17} = 3^{12} \text{ (ب)}$$

۴ با استفاده از قسمت قبل و جدول رو به رو به سؤال‌های (الف) و (ب) پاسخ دهید.

(الف) فاصله پروکسیما قنطورس از زمین چقدر است؟

(ب) فاصله ستاره شباهنگ (سیروس) چند برابر فاصله خورشید تا زمین است؟

$$۱۲۹۱۴۰۱۶۳ \times ۱۷۷۱۴۷ = 3^{17} \times 3^{11} = 3^{28} \text{ (الف)}$$

$$۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ \div ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ = 3^{29} \div 3^{17} = 3^{12} \text{ (ب)}$$

۵ محاسبه مستقیم ساده‌تر است یا استفاده از جدول؟ زمان انجام کدام روش کمتر است؟

استفاده از جدول به مراتب ساده‌تر از بکارگیری محاسبه مستقیم است.

کار در کلاس ۱

۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(الف) از $81 = 3^4$ نتیجه می‌شود: لگاریتم ... ۸۱ ... در مبنای ... ۳ ... عدد ۴ است.

(ب) لگاریتم ۱۰۰۰۰ در مبنای ۱۰ عدد ... ۴ ... است؛ زیرا $10^4 = 10000$

(پ) $16 = 4^2$ نشان می‌دهد: لگاریتم ... ۱۶ ... در مبنای ۴ عدد ... ۲ ... است.

۲ عدد ۶۴ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۲ نوشته و با استفاده از آن لگاریتم ۶۴ در مبنای ۲ را بنویسید.

$$64 = 2^6 \Rightarrow \log_2 64 = 6$$

فعالیت ۲

تساوی‌های $1^0 = 1$ و $1^1 = 1$ و $1^{\frac{1}{3}} = 1$ و $1^2 = 1$ و $1^3 = 1$ و $1^{\frac{1}{3}} = 1$ و $1^{-3} = 1$ و $1^4 = 1$... را در نظر بگیرید،

۱ در تساوی $1^a = 1$ به جای نقطه‌چین چه اعدادی می‌توان قرار داد؟

هر عدد حقیقی مانند a را می‌توان به جای آن قرار داد.

۲ آیا می‌توان عدد a را طوری پیدا کرد که: $1^a = 2$ به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۲ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

خیر. نمی‌توان چنین کاری را انجام داد. زیرا امکان ندارد ۱ به توان عددی برسد و برابر ۲ شود.

۳ آیا عدد a را می‌توان طوری یافت که در تساوی $1^a = 3$ صدق کند. به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۳ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

خیر. هیچ عدد حقیقی را نمی‌توان به جای a قرار داد تا $1^a = 3$ بشود، همچنین می‌توان گفت لگاریتم هر عدد در مبنای ۱ غیرقابل تعریف می‌باشد.

۴ آیا عددی غیر از ۱ را می‌توان به صورت عددی توان‌دار با پایه ۱ نوشت؟ چرا؟

خیر. نمی‌توان زیرا $1^a = 1$ که a عضو اول اعداد حقیقی است.

۵ با توجه به نتایج بالا، فکر می‌کنید می‌توان عدد ۱ را به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب کرد؟ چرا؟

خیر. عدد یک را نمی‌توان به صورت مبنای لگاریتم در نظر گرفت. زیرا ۱ به توان هر عددی ۱ می‌شود.

کار در کلاس ۲

۱ هر سطر جدول زیر، تساوی‌های متناظر را نشان می‌دهد، جدول را کامل کنید.

تساوی شامل عدد توان‌دار	تساوی شامل لگاریتم
$5^3 = 125$	$\log_5 125 = \dots$
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = \dots$
$3^4 = 81$	$\log_3 81 = \dots$
$4^3 = 64$	$\log_4 64 = \dots$
$2^5 = 32$	$\log_2 32 = \dots$
$b^3 = 2/1$	$\log_b 2/1 = \dots$
$3^3 = 27$	$\log_3 27 = \dots$
$8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$	$\log_8 2 = \dots$
$4^{3/3} = a$	$\log_4 a = 3/3$

۲ عدد ۲۵ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۵ نوشته و با استفاده از آن حاصل $\log_5 25$ را بنویسید.

$$25 = 5^2 \Rightarrow \log_5 25 = 2$$

فعالیت ۳

۱ اگر $b = 4^c$ ، جدول زیر را کامل کنید.

c	-۲	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲
b	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۱۶

۲ آیا در سطر دوم جدول عددی منفی وجود دارد؟ درباره علامت b چه می‌توان گفت؟

خیر. عدد منفی یافت نمی‌شود. در واقع می‌توان گفت $b > 0$ است.

۳ با توجه به اینکه تساوی $b = 4^c$ نشان می‌دهد $\log_4 b = c$ ، درباره علامت b در $\log_4 b$ چه می‌توان گفت؟

نباید منفی باشد یا به عبارت دیگر $b > 0$ است.

۴ اگر در پایه به جای ۴، عدد ۳ باشد با یک مثال درستی نتیجه‌ای که از قسمت قبل به دست آورده‌اید را بررسی کنید.

c	-۲	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲
b	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۱۶

۵ اگر a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد و $b = a^c$ در باره علامت b چه می‌توان گفت؟ در باره علامت $\log_a b$ چه می‌توان گفت؟
آیا از عدد منفی می‌توان لگاریتم گرفت؟
b نمی‌تواند منفی باشد یا به عبارت دیگر فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند، یعنی $\log_a b$ برای $b > 0$ تعریف می‌شود.

کار در کلاس ۳

۱ با توجه به ویژگی‌های توان رسانی اعداد، جملات زیر را کامل کنید.

برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند a.

الف) با توجه به $a^1 = a$ ، داریم $\log_a a = ۱$

ب) از $a^0 = ۱$ نتیجه می‌شود: $\log_a 1 = ۰$

پ) با در نظر گرفتن $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ می‌توان گفت: $\log_a \frac{1}{a^n} = \log_a a^{-n} = -n$

ت) اگر $b = a^c$ ، آنگاه $\log_a b = c$ ، بنابراین: $\log_a a^c = C$

مثال‌های بالای مسائل:

الف) $\log 9 = ۰ / ۹۵۴۲$

ب) $\log ۰ / ۰۰۱۶ = -۲ / ۷۹۵۸$

مسائل

۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) از $۴^۳ = ۶۴$ نتیجه می‌شود لگاریتم ۶۴ در مبنای ۴ عدد ۳ است.

ب) لگاریتم ۳۲ در مبنای ۲ عدد ۵ است؛ زیرا $۲^۵ = ۳۲$

پ) از $\sqrt[3]{۲} = ۲^{\frac{1}{3}}$ نتیجه می‌شود: لگاریتم $\sqrt[3]{۲}$ در مبنای ۲ عدد $\frac{1}{3}$ است.

ت) با توجه به اینکه $۷^۴ = ۲۴۰۱$ داریم: $\log_7 ۲۴۰۱ = ۴$

ث) با توجه به $\frac{1}{8} = ۸^{-\frac{1}{3}}$ ، می‌توان گفت $\log_8 \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}$

ج) تساوی‌های $\log_{۱۰} ۰ / ۰۰۱ = -۳$ ، $\frac{1}{۱۰۰۰} = \frac{1}{۱۰^۳} = ۱۰^{-۳}$ نشان می‌دهند:

۲ مانند قسمت (الف) تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید.

الف) $۱۶ = ۴^۲ \leftrightarrow \log_4 ۱۶ = ۲$

ب) $۰ / ۰۰۰۱ = ۱۰^{-۴} \leftrightarrow \log_{۱۰} ۰ / ۰۰۰۱ = -۴$

پ) $۰ / ۱۲۵ = ۲^{-۳} \leftrightarrow \log_2 ۰ / ۱۲۵ = -۳$

ت) $۲ / ۱ = a^۳ \leftrightarrow \log_a ۲ / ۱ = ۳$

ث) $۴ / ۳ = ۲^x \leftrightarrow \log_2 ۴ / ۳ = x$

ج) $۹ = \left(\frac{1}{3}\right)^{-۲} \leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} ۹ = -۲$ $(۲۴۰۱)^{\frac{1}{۴}} = ۷ \leftrightarrow \log_7 ۲۴۰۱ = \frac{1}{۴}$

۳ در هر کدام از موارد زیر یک تساوی شامل لگاریتم داده شده است، مانند قسمت (الف) تساوی شامل عدد توان دار متناظر با هر کدام را بنویسید.

الف) $\log_2 ۶۴ = ۶ \leftrightarrow ۲^۶ = ۶۴$

ب) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -۲ \leftrightarrow ۳^{-۲} = \frac{1}{9}$

پ) $\log_a ۳ = ۶ \leftrightarrow a^۶ = ۳$

ت) $\log_b C = ۲ \leftrightarrow b^۲ = C$

ث) $\log_3 ۲ = x \leftrightarrow ۳^x = ۲$

ج) $\log_{32} ۲ = \frac{1}{۵} \leftrightarrow ۳۲^{\frac{1}{۵}} = ۲$

۴ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید:

الف) $\log_7 49 = 2$

ب) $\log_5 125 = 3$

پ) $\log_2 128 = 7$

ت) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

ث) $\log_{10} 0.0001 = -4$

۵ با استفاده از ماشین حساب، حاصل لگاریتم های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

الف) $\log 50 = 1.69$

ب) $\log 12 = 1.07$

پ) $\log 2 = 0.30$

۶ نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۴ برابر می شود.

الف) پس از چند واحد زمانی، وزن ۱ گرم از این باکتری ها ۶۴ گرم خواهد شد؟

با استفاده از لگاریتم مساله را حل می نماییم چون $3^x = 81$ پس داریم: $\log_3 81 = 4$

ب) پس از چند واحد زمانی، وزن این باکتری ها ۳۲ گرم خواهد شد؟

$\log_3 20 = 2.72$

۷ در هر مورد زیر، یک تساوی شامل عددی توان دار و تساوی لگاریتمی متناظر با آن را طوری بنویسید که حاصل، لگاریتم عددی با ویژگی خواسته شده باشد.

الف) عدد طبیعی $\log_2 8 = 3$ یا $\log_{10000} 4 = 4$

ب) عدد صحیح منفی $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ یا $\log_{100} \frac{1}{100} = -2$

پ) عدد گویا $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ یا $\log_7 7^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

فعالیت ۴

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	c	log b	log c	bc	log bc
۱۰	۱۰۰	۱	۲	۱۰۰۰	$\log 1000 = 3$
۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	۴	۳	۱۰۰۰۰۰۰۰	$\log 10000000 = 7$
۰/۱	۱۰۰	-۱	۲	۱۰	$\log 10 = 1$
$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱۰	$\log 10 = 1$
10^x	10^y	x	y	10^{x+y}	x + y

۲ در هر سطر چه رابطه ای بین اعداد ستون های log b و log c و ستون log bc وجود دارد؟
می توان گفت $\log bc = \log b + \log c$

۳ این رابطه را به صورت یک جمله بیان نمایید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

می توان گفت که حاصلضرب لگاریتم دو عدد با جمع لگاریتم های آن دو عدد برابر است.
 $\log(bc) = \log(b) + \log(c)$

کار در کلاس ۴

۱ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

الف) $\log 4 + \log 25 = \log 4 \times 25 = \log 100 = 2$

ب) $\log 100\sqrt{10} = \log 100 + \log \sqrt{10} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

پ) $\log \sqrt[3]{20} + \log \sqrt[3]{2} + \log \sqrt[3]{25} = \log (\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{25}) = \log (\sqrt[3]{1000}) = \log 10 = 1$

۲ فاصله دورترین ستاره‌ای که با چشم غیر مسلح قابل رؤیت است از زمین، $۵۰۵۶۱۱۹۷۲۲ \times ۱۰^{۱۱}$ برابر فاصله زمین تا خورشید است. فاصله این ستاره از زمین را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.

فاصله زمین تا خورشید $\times ۵۰۵۶۱۱۹۷۲۲ \times ۱۰^{۱۱}$ = فاصله زمین تا سیاره مورد نظر
 $= ۵۰۵۶۱۱۹۷۲۲ \times ۱۰^{۱۱} \times ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ = ۶۵۲۹۴۸۱۲۵۰۴۶۵۹۴۶۸۶ \times ۱۰^{۱۱} \approx ۶/۵ \times ۱۰^{۲۸}$

فعالیت ۵

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	c	log b	log c	$\frac{b}{c}$	$\log \frac{b}{c}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	۱	۱۰۰	$\log ۱۰۰ = ۲$
۱۰۰	۱۰	۲	۱	۱۰	$\log ۱۰ = ۱$
۰/۱	۱۰۰	-۱	۲	۰/۰۰۱	$\log ۰/۰۰۱ = -۳$
$۱۰۰\sqrt{۱۰}$	$۱۰\sqrt{۱۰}$	$\log ۱۰^{\frac{۵}{۲}} = \frac{۵}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۱۰	$\log ۱۰ = ۱$
۱۰^x	۱۰^y	x	y	۱۰^{x-y}	$x - y$

۲ در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های log b و log c و ستون $\log \frac{b}{c}$ وجود دارد؟ این رابطه را به صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

برای $b, c > ۰$ داریم $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$

کار در کلاس ۵

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف $\log ۲۰ - \log ۲ = \log \frac{۲۰}{۲} = \log ۱۰ = ۱$ ب $\log ۰/۰۰۱ = \log \frac{۱}{۱۰۰۰} = \log ۱ - \log ۱۰۰۰ = ۰ - ۳ = -۳$

۲ با تکمیل نقطه‌چین‌ها، نتیجه فعالیت (۵) را با استفاده از خاصیت لگاریتم ضرب دو عدد به دست آورید. (b و $c > ۰$)

$\log(b) = \log\left(\frac{bc}{c}\right) = \log\left(\frac{b}{c} \times c\right) = \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log(c) \Rightarrow \log\left(\frac{b}{c}\right) = \log(b) - \log(c)$

فعالیت ۶

۱ جدول زیر را تکمیل کنید.

b	n	b^n	log b	$\log b^n$
۱۰	۵	۱۰۰۰۰۰	۱	۵
۱۰۰	۲	۱۰۰۰۰	۲	۴
۰/۱	۳	۰/۰۰۱	-۱	-۳
$\sqrt{۱۰}$	۴	۱۰۰۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
۱۰^x	n	$(۱۰^x)^n = ۱۰^{nx}$	x	nx

۲ در هر سطر، چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های n و $\log b$ و عدد ستون $\log b^n$ وجود دارد؟ این رابطه را به صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

برای هر عدد حقیقی $b > 0$ و هر عدد حقیقی x ، $\log b^x = x \log b$

کار در کلاس ۶

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\log 200^5 - \log 2^5 = \log \left(\frac{200^5}{2^5} \right) = \log \left(\frac{2^5 \cdot 10^5}{2^5} \right) = \log 10^5 = 5 \log 10 = 5 \log 10^1 = 5 \times 1 \log 10 = 5 \times 1 = 5$

ب) $\log 12 + 2 \log 2 - \frac{1}{3} \log 36 + \log 125 = \log 12 + \log 4 - \log 6 + \log 125 = \log \frac{12 \times 4 \times 125}{6} = \log 1000 = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3$

۲ عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید. ($b, c, x > 0$)

الف) $4 \log 6 + 5 \log b - \frac{1}{2} \log c = \log 6^4 + \log b^5 - \log \sqrt{c} = \log \frac{6^4 \times b^5}{\sqrt{c}}$

ب) $\log x^2 - \log x = 2 \log x - \log x = \log x$

فعالیت ۷

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	a	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
۱۰۰	۱۰	۲	۱	$\frac{2}{1}$	۲
۱۰	۱۰۰	۱	۲	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sqrt{10}$	۱۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۱۰۰۰۰	۱۰۰	۴	۲	$\frac{4}{2}$	۲

۲ با مقایسه اعداد دو ستون آخر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چه رابطه‌ای بین $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ وجود دارد؟

برای $a, b > 0$ و $a \neq 1$ می‌توان گفت $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

کار در کلاس ۷

حاصل هر کدام از قسمت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

الف) $\frac{\log 4}{\log 3} = \frac{2 \log 2}{\log 3} = \frac{2 \times 0.3}{0.47} = 1.27$

$\frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4$

ب) $2 + \log_5 3 = 2 + \frac{\log 3}{\log 5} = 2 + \frac{0.47}{0.69} = 2.68$

$2 + \log_5 3 = 2 \log_5 5 + \log_5 3$
 $= \log_5 5^2 + \log_5 3 = \log_5 25 + \log_5 3 = \log_5 75$

۱ عبارات‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

نکته: تقریباً می‌توان گفت $\log 2 = 0/3$, $\log 3 = 0/47$, $\log 5 = 0/69$

الف) $\log \sqrt{5} + \log \sqrt{2} = \log 5^{\frac{1}{2}} + \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 5 + \frac{1}{2} \log 2 = \frac{1}{2} \times 0/69 + \frac{1}{2} \times 0/3 = 0/345 + 0/15 = 0/495$

ب) $\log 4000 - \log 4 = \log \frac{4000}{4} = \log 1000 = 3$

پ) $2 \log 50 + 2 \log 2 = 2(\log 50 + \log 2) = 2 \log 50 \times 2 = 2 \log 100 = 2 \log 10^2 = 2 \times 2 \log 10 = 2 \times 2 = 4$

ت) $5 \log x - \log y = \log x^5 - \log y = \log \frac{x^5}{y}$

ث) $3 \log a + 2 \log b - \log z - \log a^3 + \log 4 = \log a^3 + \log b^2 - \log z - \log a^3 + \log 4 = \log \left(\frac{a^3 \times b^2 \times 4}{a^3 \times z} \right) = \log \left(\frac{4ab^2}{z} \right)$

ج) $4 + \log_4 3 = 4 + \frac{\log 3}{\log 4} = 4 + \frac{\log 3}{2 \log 2} = 4 + \log_2 3 = 4 \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 2^4 + \log_2 3 = \log_2 (2^4 \times 3) = \log_2 48$

چ) $4 - \log_3 5 = 4 \log_3 3 - \log_3 5 = \log_3 3^4 - \log_3 5 = \log_3 81 - \log_3 5 = \log_3 \frac{81}{5}$

۲ اگر $\log 2 \approx 0/301$ و $\log 3 \approx 0/477$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \times 0/301 = 0/602$

ب) $\log 6 = \log 2 \times 3 = \log 2 + \log 3 = 0/301 + 0/477 = 0/778$

پ) $\log 18 = \log 2 \times 9 = \log 2 + \log 3^2 = \log 2 + 2 \log 3 = 0/301 + 2 \times 0/477 = 1/255$

ت) $\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3 = 0/301 - 0/477 = -0/176$

ث) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0/301 = 0/699$

ج) $\log 45 = \log 9 \times 5 = \log 3^2 + \log 5 = 2 \log 3 + \log 5 = 2 \log 3 + \log 10 - \log 2 = 2 \times 0/477 + 1 - 0/301 = 1/653$

۳ درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{\log 10}{\log 100} = \frac{1}{10}$

ب) $\log 100 + \log 0/01 = 0$

پ) $(\log 1000)^2 = \log 1000^2$

الف) $\frac{\log 10}{\log 100} = \frac{1}{2}$ (غلط می‌باشد ✖)

ب) $\log 100 + \log 0/01 = \log 100 \times 0/01 = \log 1 = 0$ (صحیح می‌باشد ✓)

پ) $\left. \begin{aligned} (\log 1000)^2 &= \log 1000 \times \log 1000 = 3 \times 3 = 9 \\ \log(1000^2) &= 2 \log 1000 = 2 \times 3 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9 \neq 6$ (غلط می‌باشد ✖)

۴ الف) با استفاده از ماشین حساب، تقریب اعشاری اعداد $\log 20$ و $\log 30$ ، $\log 600$ را تا دو رقم اعشار به دست آورید. آیا تساوی $\log(20 \times 30) = \log 20 + \log 30$ برقرار است؟

$$\log 20 = \log(2 \times 10) = \log 2 + \log 10 = 0/3 + 1 = 1/3$$

$$\log 30 = \log(3 \times 10) = \log 3 + \log 10 = 0/47 + 1 = 1/47$$

$$\log 600 = \log 2 \times 3 \times 100 = \log 2 + \log 3 + \log 100 = 0/3 + 0/47 + 2 = 2/77$$

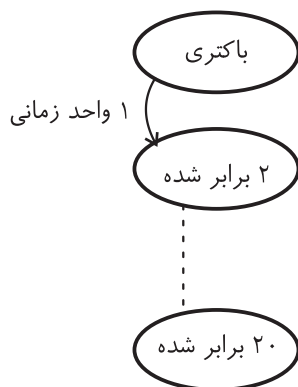
حال به بررسی درستی یا نادرستی تساوی می‌پردازیم.

$$\left. \begin{aligned} \log(20 \times 30) &= \log 600 = 2/77 \\ \log 20 + \log 30 &= 1/3 + 1/47 = 1/91 \end{aligned} \right\} 2/77 \neq 1/91 \quad (\text{برقرار نمی‌باشد} \times)$$

ب) به کمک قسمت (الف) در مربع علامت مناسب $\neq$ یا $=$ را قرار دهید:

برای اعداد مثبت a و b در حالت کلی داریم: « $\log(a \times b) \neq \log a + \log b$ »

۵ باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۲ برابر می‌شود. با استفاده از ماشین حساب تعیین کنید پس از چند واحد زمانی وزن این باکتری‌ها ۲۰ گرم خواهد شد؟



$$20 = 2^x \Rightarrow x = \log_2 20 \Rightarrow \log_2 20 = \frac{\log 20}{\log 2} = \frac{\log 2 \times 10}{\log 2} =$$

$$\frac{\log 2 + \log 10}{\log 2} = \frac{0/3 + 1}{0/3} = 4/33$$

خط بهترین برازش

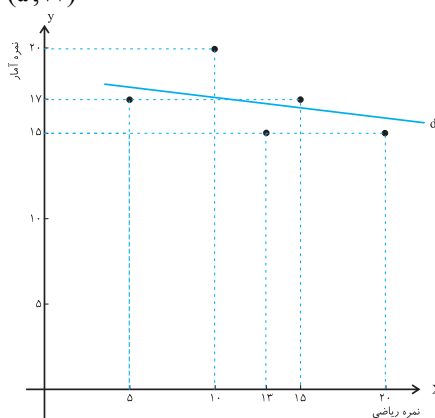
نمودار پراکنش دو کمیت: مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختصات است که طول و عرض هر نقطه، داده‌های مرتبط به اندازه‌گیری‌های متناظر دو کمیت است.

مثال: نمره ریاضی و نمره آمار پنج دانش‌آموز از یک کلاس به صورت جدول زیر است:

نمره ریاضی	۱۳	۲۰	۱۰	۱۵	۵
نمره آمار	۱۵	۱۵	۲۰	۱۷	۱۷

الف) نمودار پراکنش دو کمیت (نمره ریاضی و نمره آمار) را رسم کنید.

حل: نمرات بالا را به صورت دوتایی (آمار و ریاضی) که بیانگر یک نقطه باشد می‌نویسیم و در صفحه مختصات مشخص می‌کنیم این نقاط عبارتند از: $(۱۵, ۱۷)$, $(۱۰, ۲۰)$, $(۲۰, ۱۵)$, $(۱۳, ۵)$, $(۵, ۱۷)$



ب) آیا نقاط بر روی یک خط راست قرار دارند؟

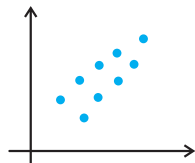
حل: این نقاط روی یک خط راست قرار ندارند.

ج) خطی (به طور تقریبی) رسم کنید که تا حد ممکن با نقاط مشخص شده در صفحه کمترین فاصله را داشته باشد.

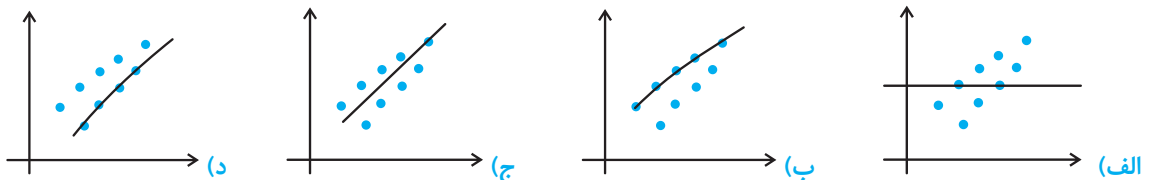
حل: برای رسم این خط، بهتر است سعی شود نیمی از نقاط بالای خط و نیم دیگر زیر خط با فاصله یکسان از خط قرار گیرند. این خط در نمودار بالا با 'd' نشان داده شده است.

خط بهترین برازش: خطی که بهترین رابطه خطی ممکن بین دو کمیت را نشان دهد خط بهترین برازش می‌نامند که معمولاً به کمک excel رسم می‌شود.

مثال: نمودار رو به رو بیانگر مقادیر متناظر بین دو کمیت می‌باشد.



کدام یک از نمودارهای زیر، خط بهترین برازش برای نمودار پراکنش را نشان می‌دهد؟

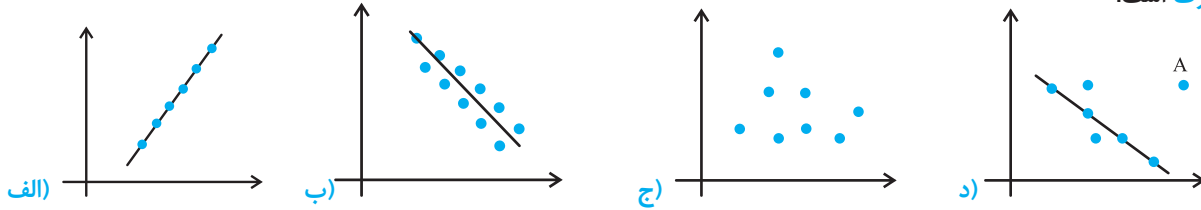


حل: نمودار (ج) خط بهترین برازش است زیرا این خط کمترین فاصله را با نقاط دارد و تقریباً نیمی از نقاط بالای خط و نیمی از نقاط پایین خط قرار گرفته‌اند.

در سال ۱۸۰۵، ادريان لژاندر روشی برای رسم خط بهترین برازش با یافتن ضریب زاویه خط و عرض از مبدأ آن خط پیدا کرد. او در این روش سعی کرد تا مجموع مجذور خط‌های بین مقدار واقعی و مقدار محاسبه شده کمترین مقدار شود. خط به دست آمده با این روش را خط بهترین برازش و این روش را روش کمترین مجذورات می‌نامند.

تذکر: در آمار به نقطه‌ای که با بقیه داده‌ها تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد «داده پرت» می‌گویند. معمولاً اگر داده‌های پرت را از داده‌ها خارج کنیم، درک بهتری از وضعیت به دست می‌آوریم. به کمک خط بهترین برازش، می‌توان رابطه خطی مناسبی را بین دو کمیت به دست آورد و از طریق آن مقادیر متنظر بین این کمیت‌ها را پیش‌بینی کرد و از این پیش‌بینی‌ها در برنامه‌ریزی‌ها استفاده کرد.

مثال: در نمودارهای زیر، هر نقطه بیانگر مقادیر متنظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها بین این دو کمیت رابطه‌ای وجود دارد؟ رابطه بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایش یا کاهش وزن یکی برحسب دیگری توصیف کنید و مشخص کنید کدام نمودار دارای داده پرت است.



حل: در نمودار (الف) نقاط روی یک خط راست قرار دارند و با افزایش مقادیر روی محور X ، مقادیر روی محور Y نیز افزایش می‌یابد. نقاط مشخص شده در نمودار (ب) روی یک خط راست قرار ندارند ولی با افزایش مقادیر روی محور X ، معمولاً مقادیر روی محور Y کاهش می‌یابد. در نمودار (ج) تغییرات روی محور X هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره تغییرات مقادیر روی محور Y به ما نمی‌دهد. در نمودار (د) هم نقاط روی یک خط راست قرار ندارند ولی با افزایش مقادیر روی محور X ، عموماً مقادیر روی محور Y کاهش می‌یابد. خط‌های رسم شده در (ب) و (د) خط بهترین برازش است و نمودار (د) دارای داده پرت است. که در شکل با A مشخص شده است.

درون‌یابی و برون‌یابی

فرض کنید X و Y دو کمیت مرتبط باشند، اگر مقادیر این دو کمیت برای بعضی از X ها در یک بازه مشخص باشد، پیش‌بینی مقادیر Y به ازای X های مشخص شده در این بازه به کمک خط برازش را **درون‌یابی** و پیش‌بینی مقادیر Y به ازای X های مشخص در خارج از این بازه را **برون‌یابی** می‌نامند. **تذکر:** در برون‌یابی هر چه از ابتدا یا انتهای بازه دورتر شویم ممکن است پیش‌بینی‌ها با خط‌های بیشتری همراه شوند و حتی غیرواقعی شوند.

مثال: جدول رو به رو بیانگر نرخ سود بانکی و میزان سرمایه‌ای است که بانک جذب می‌کند.

سرمایه (میلیون تومان)	نرخ سود (برحسب درصد)
۳۰	۵
۲۴	۱۲
۲۷	۱۰
۲۹	۶
۲۲	۱۵
۲۸	۷

با توجه به جدول، مقادیر درصد سود پرداختی (X) در بازه بسته $[۵, ۱۵]$ قرار دارد. پیش‌بینی مقدار سرمایه جذب شده برای نرخ سودهای مربوط به بازه $[۵, ۱۵]$ را درون‌یابی و پیش‌بینی مقدار سرمایه جذب شده در خارج بازه $[۵, ۱۵]$ را برون‌یابی می‌نامند. به عنوان مثال برای پیش‌بینی مقدار سرمایه جذب شده با سود ۲۰ درصد از برون‌یابی استفاده کنیم و برای پیش‌بینی مقدار سرمایه جذب شده با سود ۱۱ درصد از درون‌یابی استفاده می‌کنیم.

میانه

میانگین: میانگین هر تعداد داده برابر مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد آن‌هاست. به طور مثال، میانگین داده‌های X_1 و X_2 و ... و X_n را با $\bar{X}$ نشان

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

می‌دهند و برابر است با:

مثال: میانگین داده‌های ۱۲ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۵ و ۱۲ را بیابید.

حل:

$$\bar{X} = \frac{۱۲ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۲}{۵} = \frac{۶۳}{۵} = ۱۲.۶$$

میانه: در تعدادی از داده‌های آماری، میانه عددی است که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر است و میانه را با M نشان می‌دهند.

به دست آوردن میانه: برای به دست آوردن میانه، ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم سپس دو حالت رخ می‌دهد:

(۱) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، آن‌گاه داده وسطی میانه است.

(۲) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد آن‌گاه میانگین دو داده وسطی میانه است.

مثال: میانه داده‌های زیر را بیابید.

الف) ۱۴ و ۱۲ و ۱۷ و ۲۰ و ۵ و ۱۳ و ۱۲

۵, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۷, ۲۰

حل: ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم (از کوچک به بزرگ)
تعداد داده‌ها فرد است داده وسطی یعنی ۱۳ میانه می‌باشد.

ب) ۲ و ۸ و ۱۳ و ۶ و ۱۰ و ۷

۲, ۶, ۷, ۸, ۱۰, ۱۳

حل: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$\text{میانه} = \frac{7+8}{2} = 7.5$$

تعداد داده‌ها زوج است پس میانگین دو داده وسطی میانه است بنابراین:

نکته: اگر همه داده‌ها را با عددی جمع یا تفریق کنیم، میانه نیز با آن عدد جمع یا تفریق می‌شود و همچنین اگر همه داده‌ها را در عددی ضرب کنیم میانه نیز در همان عدد ضرب می‌شود.

مثال: در ۲۰ داده آماری مرتب شده میانه داده‌ها ۱۳ است، اگر همه داده‌ها را دو برابر کنیم و ۳ واحد به آن‌ها اضافه کنیم، میانه داده‌های جدید را بیابید.

$$\text{حل: میانه جدید نیز در ۲ ضرب و با ۳ جمع می‌شود یعنی: } 2 \times 13 + 3 = 26 + 3 = 29$$

مثال: در ده داده آماری، اگر همه داده‌ها را در ۵ ضرب و ۲ واحد از همه آن‌ها کم کنیم، میانه داده‌های جدید ۶۸ می‌شود، میانه داده‌های اولیه را بیابید.

$$\text{حل: اگر میانه داده‌های اولیه را } M \text{ بنامیم داریم: } 5M - 2 = 68 \Rightarrow 5M = 70 \Rightarrow M = \frac{70}{5} = 14$$

مثال: اگر میانگین و میانه داده‌های x و ۱۵ و ۹ و ۱۵ و ۱۷ با هم برابر باشد، مقدار x را بیابید.

حل: اگر داده‌ها را مرتب کنیم حالت‌های مختلف زیر رخ می‌دهد.

۹, ۱۵, ۱۵, ۱۷, x

۹, ۱۵, ۱۵, x , ۱۷

x , ۹, ۱۵, ۱۵, ۱۷

۹, x , ۱۵, ۱۵, ۱۷

که در هر حالت میانه ۱۵ می‌باشد، چون میانه و میانگین برابرند پس میانگین نیز ۱۵ است. بنابراین مجموع ۵ داده باید $5 \times 15 = 75$ باشد یعنی

$$x = 75 - (9 + 15 + 15 + 17) = 75 - 56 = 19$$

داده پنجم یا x برابر است با:

مثال: اگر تعداد داده‌های آماری ۲۴ باشد آن‌گاه چه تعداد داده‌های آماری قبل از میانه می‌باشند؟

حل: میانه عددی است که نصف داده‌ها قبل از آن و نصف داده‌ها بعد از آن می‌باشند چون ۲۴ داده داریم پس ۱۲ داده قبل از میانه هستند.

مثال: میانه داده‌های آماری مرتب شده، میانگین داده‌های دهم و یازدهم است، اگر مجموع داده‌ها ۱۰۰۰ باشد میانگین آن‌ها را بیابید.

حل: از اینکه میانه، میانگین دو داده است پس تعداد داده‌ها زوج است، از طرفی تعداد داده‌های قبل و بعد از میانه با هم برابرند، پس قبل از داده‌های دهم و یازدهم ۹ داده و بعد از آن‌ها نیز ۹ داده داریم. یعنی در کل ۲۰ داده داریم، چون مجموع داده‌ها ۱۰۰۰ و تعداد داده‌ها ۲۰ تا است

$$\text{پس: میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد}} = \frac{1000}{20} = 50$$

مثال: دانش‌آموزی در روزهای یک هفته به ترتیب ۸ و ۲ و ۳ و ۵ و ۱ و ۷ و ۲ ساعت مطالعه کرده است، اختلاف میانگین و میانه ساعات مطالعه او در این هفته چند دقیقه است؟

حل: ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم. ۱, ۲, ۲, ۳, ۵, ۷, ۸

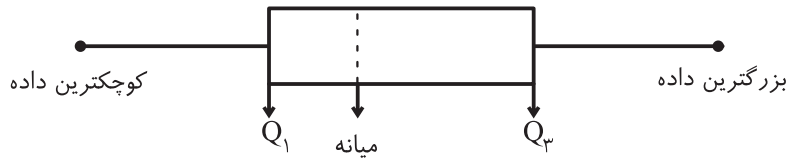
$$\text{میانه داده‌ها، ۳ می‌باشد و } \frac{1+2+2+3+5+7+8}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

بنابراین اختلاف میانه و میانگین برابر $3 - 4 = 1$ ساعت یا ۶۰ دقیقه می‌باشد.

نمودار جعبه‌ای

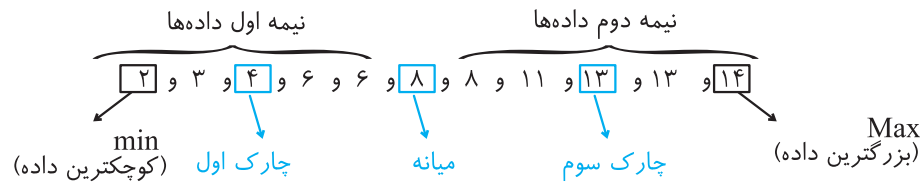
برای رسم نمودار جعبه‌ای نیاز به کوچکترین داده و بزرگترین داده، چارک اول و میانه و چارک سوم داریم. که در این جا به معرفی چارک‌ها می‌پردازیم.
چارک‌ها: اگر داده‌های آماری را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، میانه، چارک دوم است. که با M یا Q_2 نشان می‌دهند. میانه نیمه اول داده‌ها (یعنی داده‌های قبل از میانه) را چارک اول می‌نامند و با Q_1 نشان می‌دهند و میانه نیمه دوم داده‌ها (یعنی داده‌های بزرگتر از میانه) را چارک سوم می‌نامند و با Q_3 نشان می‌دهند.

نمودار جعبه‌ای داده‌ها به صورت زیر می‌باشد.

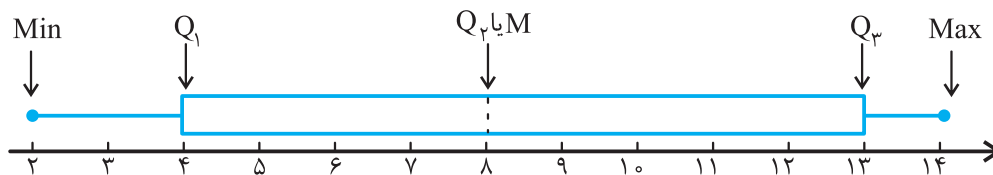


مثال: نمودار جعبه‌ای داده‌های (۲ و ۶ و ۳ و ۸ و ۱۱ و ۴ و ۱۴ و ۱۳ و ۸ و ۱۳) را رسم کنید و آن را توصیف کنید.

حل: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و میانۀ و Q_1 و Q_3 را مشخص می‌کنیم.



بنابراین نمودار جعبه‌ای به صورت زیر می‌باشد:



توصیف نمودار بالا:

در نمودار جعبه‌ای تقریباً ۲۵ درصد داده‌ها بین min و Q_1 و ۲۵ درصد داده‌ها بین Q_1 و میانۀ و ۲۵ درصد داده‌ها بین میانۀ و Q_3 و ۲۵ درصد داده‌ها بین Q_3 و ماکزیم قرار دارند. بلندتر بودن دنباله سمت چپ نسبت به سمت راست بیانگر اینست که پراکندگی داده‌ها در سمت راست بیشتر از پراکندگی داده‌ها در سمت چپ است و بلندتر بودن قسمت راست جعبه نسبت به قسمت چپ جعبه بیانگر اینست که پراکندگی داده‌ها در سمت راست داخل جعبه بیشتر از، چپ است به عبارتی دیگر اگر چهار ناحیه را با هم مقایسه کنیم فاصله بین میانۀ تا چارک سوم از بقیه بیشتر است و این بیانگر اینست که پراکندگی داده‌ها بین چارک سوم و میانۀ از بقیه جاها بیشتر است.

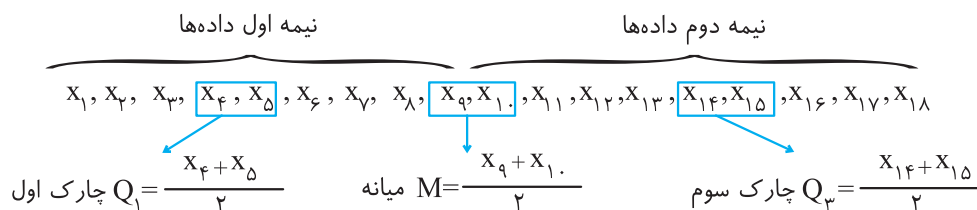
مثال: اگر ۱۸ داده داشته باشیم.

(الف) چه مقدار از آنها بعد از چارک اول قرار می‌گیرند.

(ب) چه تعداد از آنها بعد از چارک سوم قرار می‌گیرند.

(ج) چه تعداد از آنها داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای قرار می‌گیرند.

حل: فرض می‌کنیم ۱۸ داده را به صورت زیر مرتب کنیم.



(الف) داده‌های $X_5, X_6, X_7, \dots, X_{18}$ بعد از چارک اول قرار می‌گیرند که تعدادشان برابر ۱۴ می‌باشد.

(ب) داده‌های $X_{15}, X_{16}, X_{17}, \dots, X_{18}$ بعد از Q_3 قرار می‌گیرند که تعدادشان ۴ می‌باشد.

(ج) داده‌های $X_4, X_5, \dots, X_{14}$ داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای قرار می‌گیرند که تعدادشان ۱۰ می‌باشد.

تست: در نمودار جعبه‌ای ۳۱ داده آماری، میانگین داده‌های دنباله سمت چپ، ۱۲ و سمت راست ۲۱ می‌باشد. اگر میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۱۵ باشد، میانگین کل داده‌ها تقریباً کدام است؟

(کنکور انسانی ۹۲)

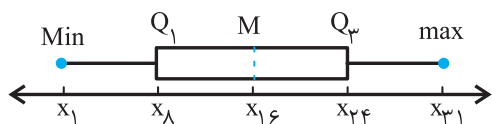
$$۱۵/۷۶ (۴)$$

$$۱۵/۶۷ (۳)$$

$$۱۵/۵۴ (۲)$$

$$۱۵/۴۵ (۱)$$

حل: گزینه (۳) درست است.



اگر ۳۱ داده آماری را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و با x_1 و x_2 و ... و x_{31} نامگذاری کنیم. آن گاه نمودار جعبه‌ای آنها به صورت زیر است.

$$\text{میانگین آنها} = \frac{x_1 + \dots + x_7}{7} = 12 \Rightarrow x_1 + \dots + x_7 = 12 \times 7 = 84$$

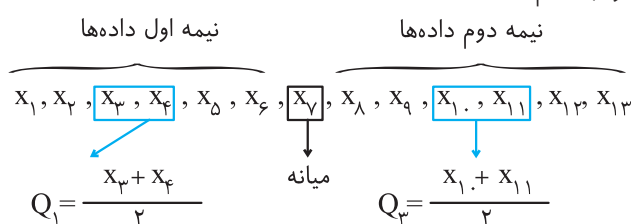
$$\text{میانگین آنها} = \frac{x_{25} + \dots + x_{31}}{7} = 21 \Rightarrow x_{25} + \dots + x_{31} = 21 \times 7 = 147$$

$$\text{میانگین آنها} = \frac{x_8 + \dots + x_{24}}{17} = 15 \Rightarrow x_8 + \dots + x_{24} = 15 \times 17 = 255$$

$$\text{میانگین کل داده‌ها} = \frac{(x_1 + \dots + x_7) + (x_8 + \dots + x_{24}) + (x_{25} + \dots + x_{31})}{31} = \frac{84 + 255 + 147}{31} = \frac{486}{31} = 15 \frac{21}{31}$$

مثال: اگر ۱۳ داده داشته باشیم چه تعداد از آنها بعد از چارک سوم قرار می‌گیرند و چه تعداد از آنها در نمودار جعبه‌ای داخل جعبه و روی جعبه قرار می‌گیرند؟

حل: اگر ۱۳ داده را به صورت زیر مرتب کنیم:



طبق نمودار بالا، داده‌های x_{11}, x_{12}, x_{13} بعد از چارک سوم قرار می‌گیرند که تعداد آنها ۳ تا می‌باشد و داده‌های $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ داخل و روی نمودار جعبه‌ای قرار می‌گیرند که تعدادشان ۷ تا می‌باشد.

نکته: در نمودار جعبه‌ای Q_1 یا چارک اول بیانگر اینست که ۲۵ درصد داده‌ها قبل از آن و ۷۵ درصد داده‌ها بعد از آن قرار دارند. Q_3 بیانگر اینست که ۷۵ درصد داده‌ها قبل از آن و ۲۵ درصد داده‌ها بعد از آن قرار دارند و ۵۰ درصد داده‌ها داخل جعبه قرار دارند. به عبارتی دیگر تقریباً $\frac{1}{4}$ داده‌ها کمتر از Q_1 هستند، و $\frac{1}{4}$ داده‌ها بین Q_1 و Q_2 هستند. $\frac{1}{4}$ داده‌ها بین Q_2 و Q_3 هستند و $\frac{1}{4}$ داده‌ها بیشتر از Q_3 هستند و تقریباً نصف داده‌ها بین Q_1 و Q_3 هستند (یعنی تقریباً نصف داده‌ها داخل جعبه هستند).

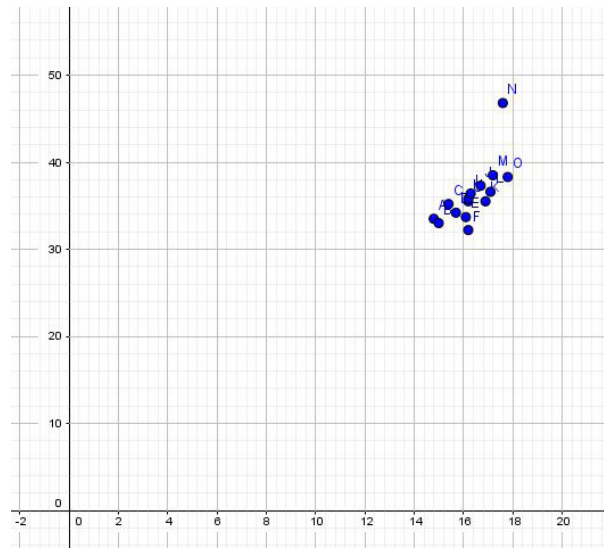
فعالیت ۱

نظریه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد بین اندازه دور مچ دست و اندازه دور گردن افراد یک رابطه خطی وجود دارد. تولیدکنندگان با داشتن این رابطه می‌توانند اندازه‌های مناسبی برای محصولات خودشان در نظر بگیرند. برای آشنایی با فرایند پیدا کردن این رابطه، اندازه دور گردن و دور مچ دست ۱۵ نفر در جدول رو به رو آورده شده است

اندازه دور گردن (cm برحسب y)	اندازه دور مچ (cm برحسب n)
۳۳/۵	۱۴/۸
۳۳	۱۵
۳۵/۲	۱۵/۴
۳۴/۲	۱۵/۷
۳۳/۷	۱۶/۱
۳۲/۲	۱۶/۲
۳۵/۵	۱۶/۲
۳۵/۸	۱۶/۳
۳۶/۴	۱۶/۳
۳۷/۳	۱۶/۷
۳۵/۵	۱۶/۹
۳۶/۶	۱۷/۱
۳۸/۵	۱۷/۲
۴۶/۸	۱۷/۶
۳۸/۳	۱۷/۸



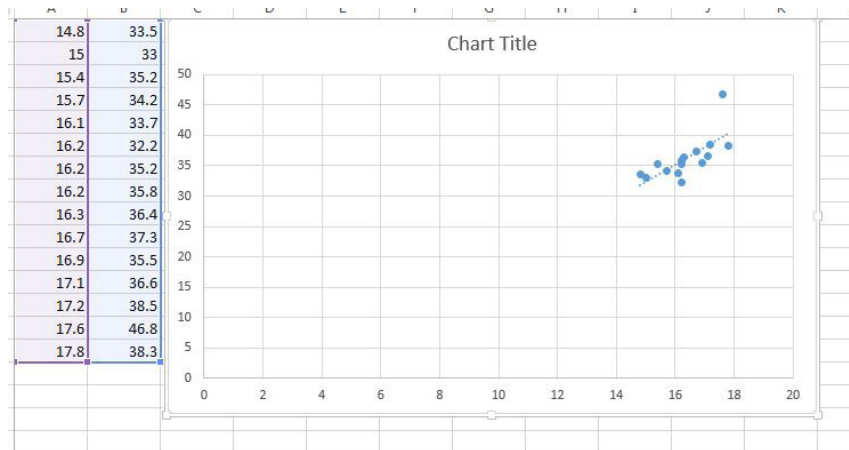
۱ در صفحه مختصات زیر، نقطه‌هایی را مشخص کنید که طول هر نقطه، نشان‌دهنده اندازه دور میج و عرض آن نشان‌دهنده اندازه دور گردن یک نفر است.



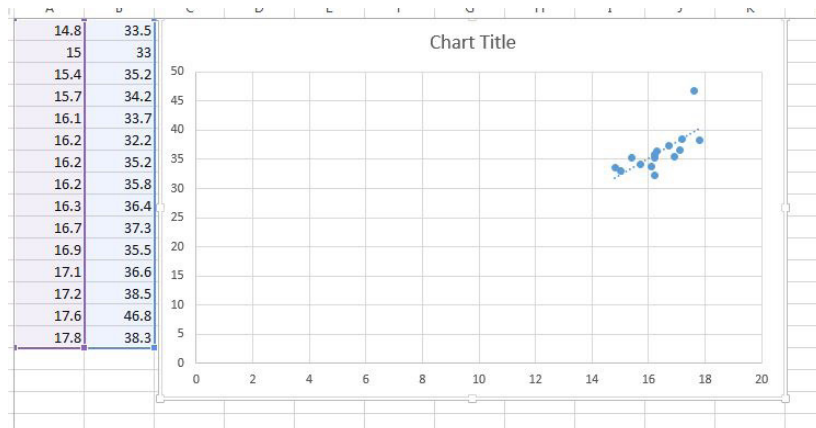
۲ آیا نقاط، روی یک خط راست قرار دارند؟

خیر. روی خط راست قرار ندارند.

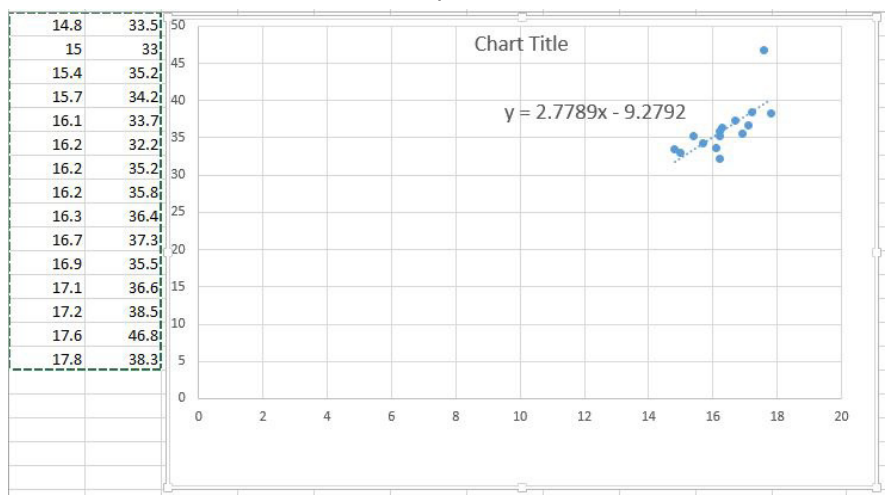
۳ خطی (به طور تقریبی) رسم کنید که تا حد ممکن با نقاط مشخص شده در صفحه، کمترین فاصله را داشته باشد. سعی کنید نیمی از نقاط در بالای خط و نیمی دیگر زیر خط و با فاصله یکسان از خط قرار گیرند.



۴ اطلاعات جدول را در excel وارد کنید و طبق دستورالعمل صفحه ۱۲۰، به کمک excel خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط مشخص شده روی صفحه داشته باشد.



۵ اگر x اندازه دور میج و y اندازه دور گردن باشد، معادله خط رسم شده را به کمک excel طبق دستورالعمل صفحه بعد پیدا کنید؟



۶ ستون y' را با دو رقم اعشار کامل کنید. (y' اندازه دور گردن به کمک معادله خط است).

x	y	y'	$e = y - y'$	e^2
۱۴.۸	۳۳.۵	۳۱.۸۴۱۸	۱.۶۵۸۲	۲.۷۴۹۶۲۷
۱۵	۳۳	۳۲.۳۸۸۵	-۰.۶۱۱۵	۰.۳۷۳۹۳۲
۱۵.۴	۳۵.۲	۳۳.۴۸۱۹	۱.۷۱۸۱	۲.۹۵۱۸۶۸
۱۵.۷	۳۴.۲	۳۴.۳۰۱۹۵	-۰.۱۰۱۹	۰.۰۱۰۳۹۴
۱۶.۱	۳۳.۷	۳۵.۳۹۵۳۵	-۱.۶۹۵۳	۲.۸۷۴۲۱۲
۱۶.۲	۳۲.۲	۳۵.۶۶۸۷	-۳.۴۶۸۷	۱۲.۰۳۱۸۸
۱۶.۲	۳۵.۵	۳۵.۶۶۸۷	-۰.۱۶۸۷	۰.۰۲۸۴۶
۱۶.۲	۳۵.۸	۳۵.۶۶۸۷	-۰.۱۳۱۳	۰.۰۱۷۲۴
۱۶.۸۳	۳۶.۴	۳۷.۳۹۰۸۰۵	-۰.۹۹۰۸	۰.۹۸۱۶۹۵
۱۶.۷	۳۷.۳	۳۷.۰۳۵۴۵	۰.۲۶۴۵۵	۰.۰۶۹۹۸۷
۱۶.۹	۳۵.۵	۳۷.۵۸۲۱۵	-۲.۰۸۲۲	۴.۳۳۵۳۴۹
۱۷.۱	۳۶.۶	۳۸.۱۲۸۸۵	-۱.۵۲۸۹	۲.۳۳۷۳۸۲
۱۷.۲	۳۸.۵	۳۸.۴۰۲۲	۰.۰۹۷۸	۰.۰۰۹۵۶۵
۱۷.۶	۴۶.۸	۳۹.۴۹۵۶	۷.۳۰۴۴	۵۳.۳۵۴۲۶
۱۷.۸	۳۸.۳	۴۰.۰۴۲۳	-۱.۷۴۲۳	۳.۰۳۵۶۰۹

۷ آیا مقادیر به دست آمده به کمک معادله خط، با مقادیر اندازه گیری شده برابرند؟ چرا؟

خیر. زیرا همانطور که در جدول مشخص است، با مقداری خطا مواجه شده است.

۸ ستون خطاها (e)، اختلاف مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده را کامل کنید.

در جدول بالا کامل شده.

۹ مجموع خطاها (ستون e) را به دست آورید. آیا این عدد مجموع واقعی خطاها را نشان می دهد؟ چرا؟

حاصل جمع خطاها برابر ۰/۲۵۷۰۰ است، زیرا به دلیل وجود خطا در گرد کردن اعداد مجموع اعداد صفر نمی شود.

۱۰ مجموع مجذور خطاها را به دست آورید.

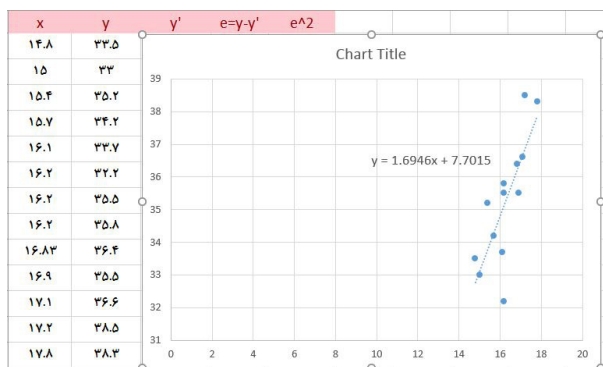
$$e^2 = ۰/۰۰۰۰۵۶۵۵۰۴ = ۵/۶۵۵۰۴ \times ۱۰^{-۵}$$

۱۱ فکر می کنید چرا مجذور خطاها را به دست می آوریم؟

به دلیل اینکه این عدد بسیار به ۰ نزدیک است و از طرفی هم به این دلیل که علامت خطا در محاسبات ما تأثیرگذار نباشد.



فعالیت ۲



۱ در فعالیت (۱) با حذف سطر مربوط به ۱۷/۶ (در ستون اول)،

نقطه $\begin{bmatrix} ۱۷/۶ \\ ۴۶/۸ \end{bmatrix}$ را از داده‌هایشان خارج کنید و خطی رسم کنید که

کمترین فاصله را با نقاط داشته باشد.

y'	e=y-y'	e^2	y''	e'=(y-y'')	e'^2
۳۱.۸۴۱۸	۱.۶۵۸۲	۲.۷۴۹۶۲۷	۳۲.۷۸۱۶	-۰.۷۱۸۴۲	۰.۵۱۶۱۳
۳۲.۳۸۸۵	-۰.۶۱۱۵	۰.۳۷۳۹۳۲	۳۳.۱۲۰۵	-۰.۱۲۰۵	۰.۰۱۴۵۲
۳۳.۴۸۱۹	۱.۷۱۸۱	۲.۹۵۱۸۶۸	۳۳.۷۹۸۳	۱.۴۰۱۶۶	۱.۹۶۴۶۵
۳۴.۳۰۱۹۵	-۰.۱۰۱۹	۰.۰۱۰۳۹۴	۳۴.۳۰۶۷	-۰.۱۰۶۷	۰.۰۱۱۳۹
۳۵.۳۹۵۳۵	-۱.۶۹۵۳	۲.۸۷۴۲۱۲	۳۴.۹۸۴۶	-۱.۲۸۴۶	۱.۶۵۰۰۹
۳۵.۶۶۸۷	-۳.۴۶۸۷	۱۲.۰۳۱۸۸	۳۵.۱۵۴	-۲.۹۵۴	۸.۷۲۶۲۳
۳۵.۶۶۸۷	-۰.۱۶۸۷	۰.۰۲۸۴۶	۳۵.۱۵۴	-۰.۳۴۵۹۸	۰.۱۱۹۷
۳۵.۶۶۸۷	۰.۱۳۱۳	۰.۰۱۷۲۴	۳۵.۱۵۴	۰.۶۴۵۹۸	۰.۴۱۷۲۹
۳۷.۳۹۰۸۰۵	-۰.۹۹۰۸	۰.۹۸۱۶۹۵	۳۶.۲۲۱۶	-۰.۱۷۸۳۸	۰.۰۳۱۸۲
۳۷.۵۸۲۱۵	-۲.۰۸۲۲	۴.۳۳۵۳۴۹	۳۶.۳۴۰۲	-۰.۸۴۰۲	۰.۷۰۶
۳۸.۱۲۸۸۵	-۱.۵۲۸۹	۲.۳۳۷۳۸۲	۳۶.۶۷۹۲	-۰.۰۷۹۲	۰.۰۰۶۲۷
۳۸.۴۰۲۲	-۰.۹۷۸	۰.۰۰۹۵۶۵	۳۶.۸۴۸۶	۱.۶۵۱۳۸	۲.۷۲۷۰۶
۴۰.۰۴۲۳	-۱.۷۴۲۳	۳.۰۳۵۶۰۹	۳۷.۸۶۵۴	-۰.۴۳۴۶۲	۰.۱۸۸۸۹

۲ ستون "y" را با دو رقم اعشار کامل کنید. ("y" اندازه دور

گردن به کمک معادله جدید خط راست)

۳ ستون "e'" را کامل کنید.

۴ مجموع مجذور خطاها را برای مقادیر به دست آمده برای "y"

به دست آورید و با جواب قسمت ۱۰ در فعالیت (۱) مقایسه کنید.

۵ فکر می‌کنید چرا مجذور خطاها را به دست می‌آوریم؟

نمودار دوم زیر $\begin{bmatrix} ۱۷/۶ \\ ۴۶/۸ \end{bmatrix}$ با بقیه داده‌ها متفاوت است و به آن داده پرت گفته می‌شود که اگر اینجور داده‌ها از معادله حذف بشود بهتر است و

به جواب دقیق‌تری می‌رسیم.

ریاضی (۲)



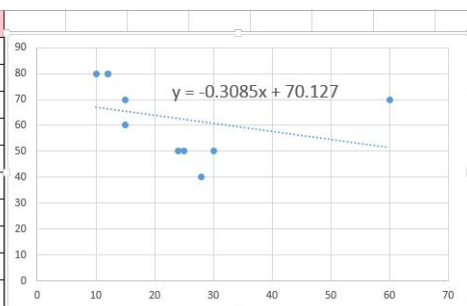
کار در کلاس ۱

تعداد هنرجویان در کلاس	درصد قبولی
۱۰	۸۰
۱۵	۶۰
۳۰	۵۰
۱۲	۸۰
۲۵	۵۰
۲۴	۵۰
۱۵	۷۰
۶۰	۷۰
۲۸	۴۰
۱۲	۸۰

برخی از هنرآموزان عقیده دارند که درصد قبولی هنرجویان در یک کلاس با تعداد هنرجویان در کلاس رابطه دارد. جدول رو به رو تعداد هنرجویان در کلاس‌های مختلف یک هنرستان و درصد قبولی آنها در امتحان پایان سال را نشان می‌دهد.

راهنمای گام به گام

درصد قبولی	تعداد هنرجویان در کلاس
80	10
60	15
50	30
80	12
50	25
50	24
70	15
70	60
40	28
80	12



۱ نمودار پراکنش را رسم کنید.

۲ خط بهترین برازش را رسم کنید.

۳ پیش‌بینی می‌کنید چند درصد از هنرجویان در یک کلاس ۴۰ نفره قبول می‌شوند.

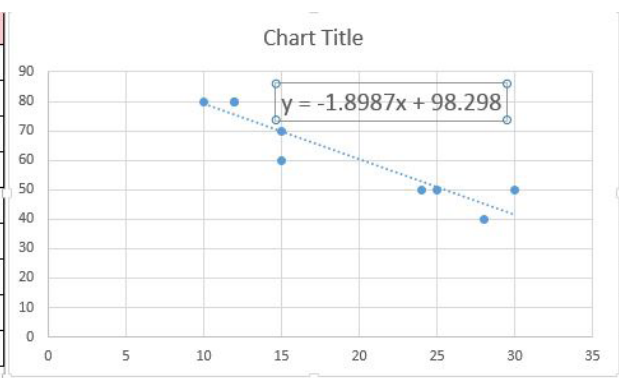
$$y = 0.3085x + 70.127 \xrightarrow{x=40} y = 0.3085 \times 40 + 70.127 = 82.467\% \approx 82.5\%$$

۴ برخی عقیده دارند نقطه $\begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix}$ (اطلاعات مربوط به یک کلاس ۶۰ نفره) یک داده پرت (مربوط به یک وضعیت غیر معمول) است. فکر

می‌کنید اگر در تحلیل خود این داده را کنار بگذارید، بهتر است یا خیر؟ توضیح دهید چرا؟
بله. این داده، داده پرت است و بهتر است از محاسبات کمتر گذاشته بشود. زیرا فاصله بسیاری با سایر نقاط دارد پس بهتر است حذف بشود.

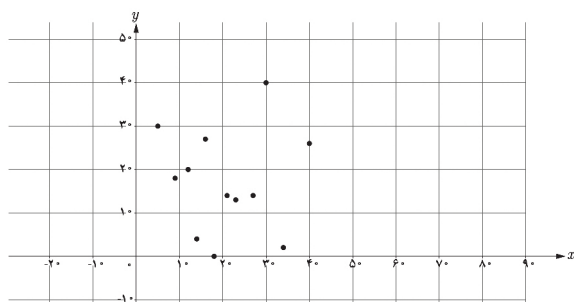
۵ این داده را خارج کنید و پاسخ سؤال (۳) را مجدداً به دست آورید.

درصد قبولی	تعداد هنرجویان در کلاس
80	10
60	15
50	30
80	12
50	25
50	24
70	15
40	28
80	12

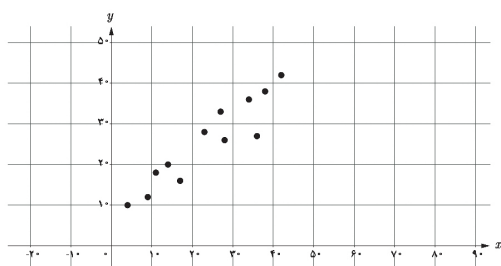


مسائل

۱ در نمودارهای زیر، هر نقطه نشان‌دهنده مقادیر متناظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها، بین این دو کمیت رابطه‌ای وجود دارد؟
رابطه بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایشی یا کاهش‌ی بودن یکی بر حسب دیگری، توصیف کنید.

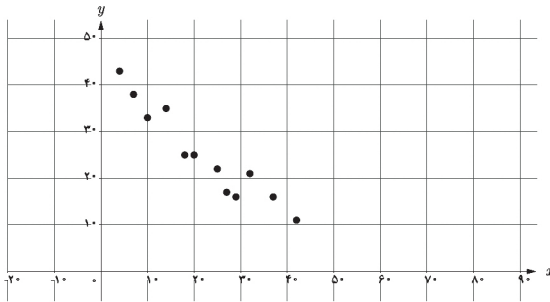


الف) در نمودار الف هیچ رابطه‌ای بین مقادیر طول و ارتفاع وجود ندارد و نمی‌توان درصد افزایش یا کاهش بودن آن مطلبی گفت.

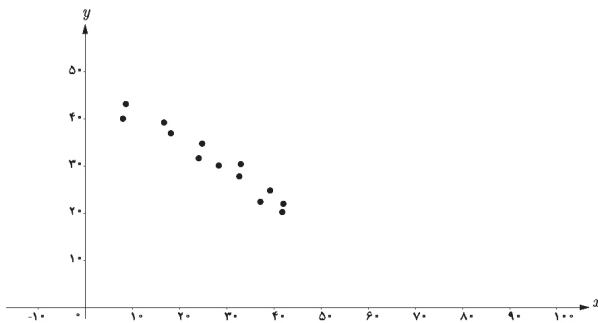


ب) می‌توان گفت رابطه بین این دو کمیت وجود دارد. این نمودار دارای رابطه افزایشی است.

ج) می‌توان گفت رابطه بین این دو کمیت وجود دارد. این نمودار دارای رابطه‌ی کاهشی است.



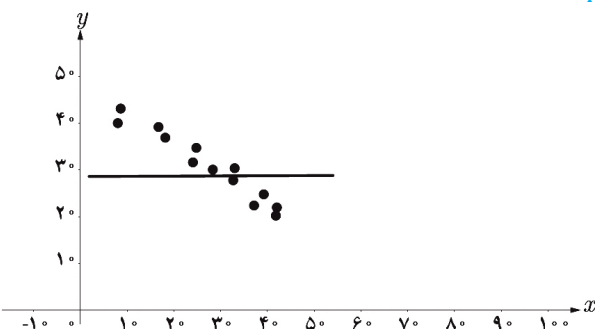
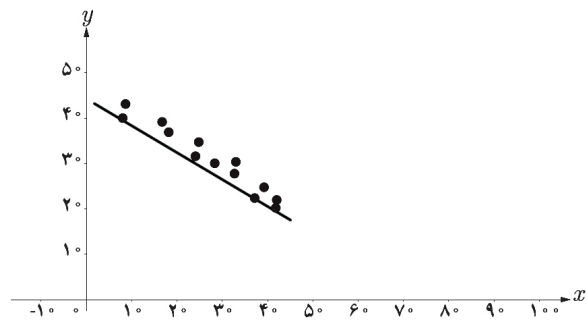
۲ نمودار رو به رو رابطه بین مدت زمانی که فرد رانندگی می‌کند و مسافت باقی‌مانده تا مقصد را نشان می‌دهد.



کدامیک از نمودارهای زیر، خط بهترین برازش برای نمودار پراکنش بالا را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید.

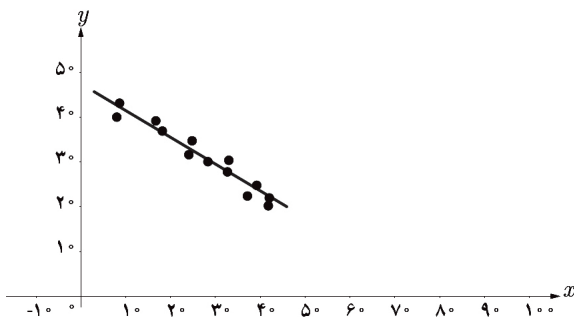
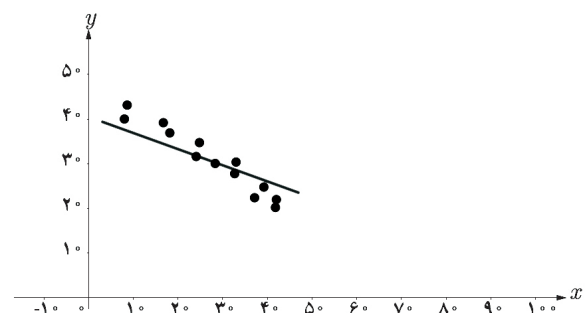
(الف)

(ب)



(ج)

(د)



گزینه «د» صحیح است.

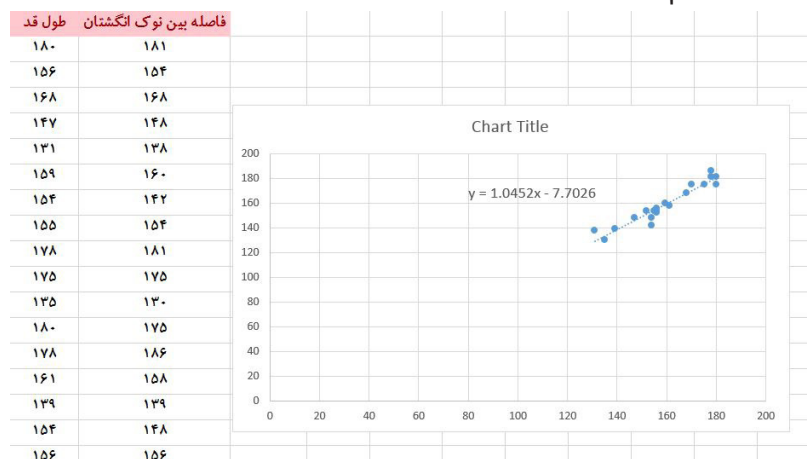
گزینه (الف) چون تمامی نقاط بالای خط می‌باشد نمی‌توان گفت این خط برازش خوبی برای داده‌ها است.

گزینه (ب) شیب خط برازش برای این معادله ۰ است. که غلط می‌باشد. زیرا داده‌ها روند کاهشی دارند. پس شیب می‌بایست منفی باشد.

گزینه (ج) این خط هم برازش مناسبی برای داده‌ها نمی‌باشد، زیرا حجم داده‌هایی که پایین خط است بیشتر از داده‌هایی است که بالای خط است.

گزینه (د) این خط برازش مناسبی برای داده‌های ما می‌باشد زیرا هم نزولی بودن داده‌ها را نمایش می‌دهد و هم تکرار نقاط بالا و پایین نمودار تقریباً با هم برابر می‌باشند.

۳ جدول (کتاب درسی) طول قد و فاصله نوک دو انگشت وسط ۲۰ نفر را (در حالتی که دست‌ها از طرفین کاملاً باز است) برحسب سانتی‌متر نشان می‌دهد.
الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.



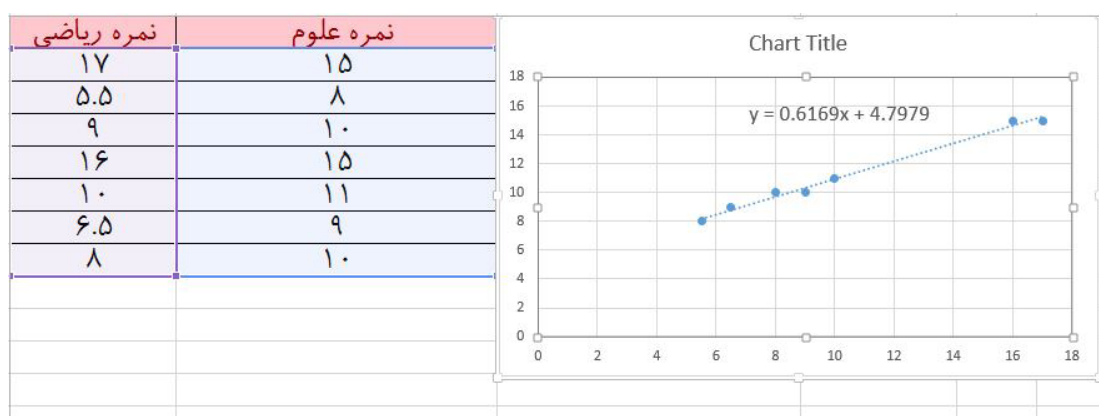
- ب) آیا رابطه‌ای بین طول قد و فاصله نوک دو انگشت وسط افراد دیده می‌شود؟ توضیح دهید.
 بله. می‌توان گفت بین این دو رابطه‌ای وجود دارد. با افزایش طول قد فاصله بین نوک انگشتان نیز بیشتر می‌شود.
 پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و معادله آن را به دست آورید.
 خط در نمودار رسم شده است و معادله آن $y = 1.0452x - 7.7026$ است.
 ت) به کمک معادله یا نمودار، با داشتن طول قد خودتان، فاصله نوک دو انگشت وسط خودتان را تخمین بزنید.

$$\text{قد} = 186 \Rightarrow x = 186 \Rightarrow y = 1.0452x - 7.7026 \Rightarrow y = 1.0452 \times 186 - 7.7026 = 186.7046$$

 ث) فاصله نوک دو انگشت وسط خودتان را اندازه بگیرید. آیا با مقدار تخمین زده شده تفاوت دارد؟ اگر بله، توضیح دهید چرا؟
 تقریباً برابر است. طبق نمودار پراکنش نیز همین انتظار می‌رفت فاصله اندازه‌گیری شده ۱۸۶ می‌باشد که بسیار به عدد 186.7046 نزدیک است.

۴ سینا می‌گوید: اگر ریاضی شما خوب باشد، علوم شما نیز خوب است. علی می‌خواهد درستی این گفته را بررسی کند. به همین دلیل نمره ریاضی و علوم ۷ نفر را پرسید. داده‌هایی که علی به دست آورده در جدول رو به رو ثبت شده است.
 الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

نمره ریاضی	۸	۶/۵	۱۰	۱۶	۹	۵/۵	۱۷
نمره علوم	۱۰	۹	۱۱	۱۵	۱۰	۸	۱۵



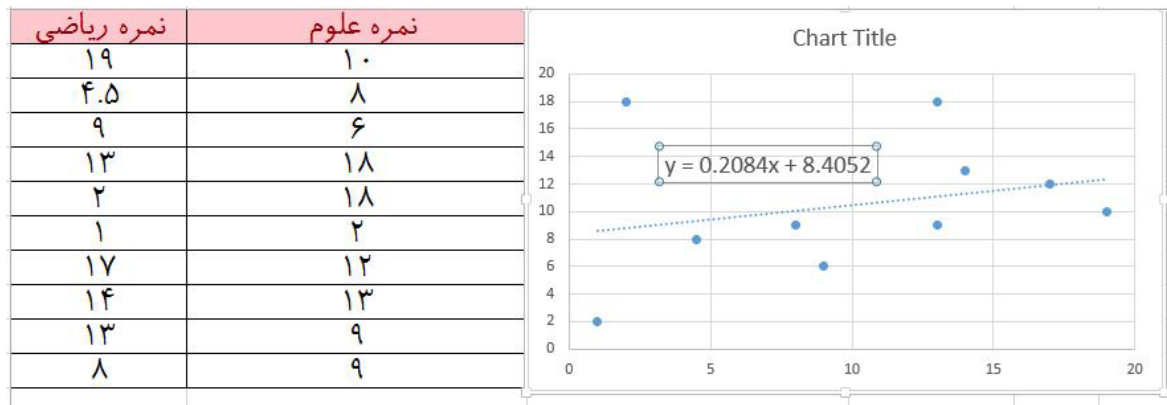
- ب) آیا با گفته سینا موافق‌اید؟ دلیل خود را توضیح دهید.
 بله. می‌توان گفت صحیح است. زیرا با افزایش نمره ریاضی، نمره فیزیک نیز افزایش یافته است و می‌توان گفت بین این دو نمره رابطه وجود دارد.
 پ) خط بهترین برازش را رسم کنید.
 در نمودار بالا مشخص شده است.
 ت) پیش‌بینی می‌کنید نمره علوم دانش‌آموزی که در آزمون ریاضی ۱۴ شده است، چند باشد؟
 طبق معادله برازشی که به دست آوردیم $x = 14$ قرار می‌دهیم.

$$y = 0.6169x + 4.7979 \xrightarrow{x=14} y = 13.4345 \approx 13.5$$

۵ جدول زیر، نمرات ریاضی و زبان ۱۰ دانش آموز را نشان می‌دهد.

نمره ریاضی	۱۹	۴/۵	۹	۱۳	۲	۱	۱۷	۱۴	۱۲	۸
نمره زبان	۱۰	۸	۶	۱۸	۱۸	۲	۱۲	۱۳	۹	۹

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید. (طول هر نقطه نمره ریاضی و عرض هر نقطه نمره زبان یک دانش آموز است).



ب) آیا بین نمره ریاضی و نمره زبان دانش آموزان رابطه‌ای مشاهده می‌کنید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

خیر. نمی‌توان گفت بین این دو رابطه‌ای وجود دارد. چون روند مشخصی ندارند و نمی‌توان گفت با افزایش یک نمره چه تغییری در نمره دوم اتفاق می‌افتد.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و به کمک معادله آن و یا نمودار، نمره زبان دانش آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

در نمودار رسم شده است. و ۱۵ را در معادله $y = 0.2084x + 8.4052$ قرار می‌دهیم.

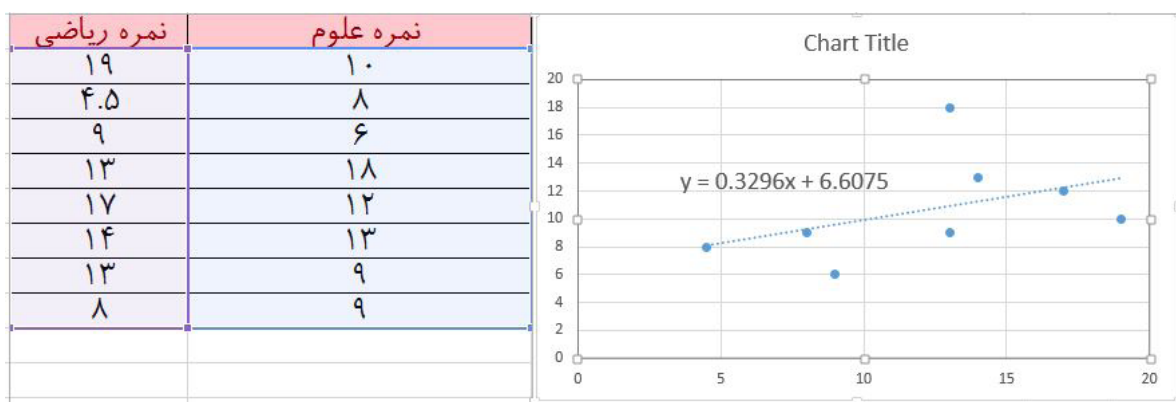
$$y = 0.2084 \times 15 + 8.4052 = 11.5312$$

ت) نقطه‌های نشان دهنده نمره ریاضی و زبان کدام دو دانش آموز با نمرات بقیه دانش آموزان هماهنگی ندارد؟

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix}$ با بقیه داده‌ها نسبت ندارد.

ث) این دو داده را از داده‌هایتان حذف کنید و خط بهترین برازش را رسم کنید و این بار نمره زبان دانش آموزی را که در آزمون ریاضی

۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.



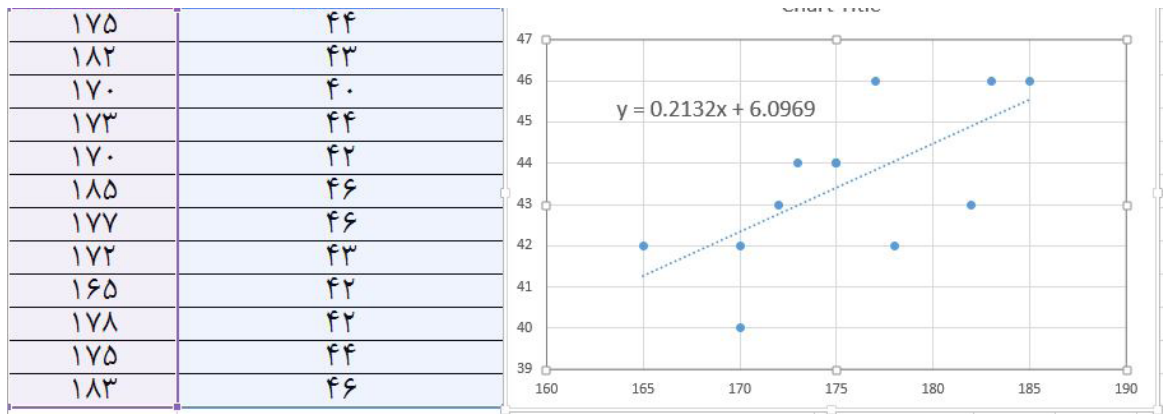
$$y = 0.3296x + 6.6075 \xrightarrow{x=15} y = 11.5515$$

ج) آیا تفاوتی بین دو پیش‌بینی شما وجود دارد؟ دلیل خود را توضیح دهید.

تفاوت زیادی وجود ندارد. زیرا تقریباً دو داده‌ای را حذف کردیم که یکی در بالای نمودار و یکی در پایین نمودار قرار دارد.

۶ جدول زیر داده‌های مربوط به اندازه کفش و قد ۱۲ مرد را نشان می‌دهد.

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را به کمک excel رسم کنید.



ب) با استفاده از نمودار، اندازه کفش مردی را که قد او ۱۸۰ سانتی‌متر است پیش‌بینی کنید.

طبق نمودار برازش $y = 0.2132x + 6.0969$ نمودار برازش این داده‌هاست. پس به جای x عدد ۱۸۰ را قرار می‌دهیم.

$$y = 0.2132 \times 180 + 6.0969 = 44.47729$$

ب) باستان‌شناسان ردپایی به اندازه ۵۸ سانتی‌متر پیدا کرده‌اند. پیش‌بینی می‌کنید طول قد این انسان چقدر بوده است؟

$$58 = 0.2132x + 6.0969 \Rightarrow x = \frac{51.9031}{0.2132} = 243.4 \text{ cm}$$

۷ دانش‌آموزی برای توصیف داده‌هایش، نمودار پراکنش را رسم کرد. او برای رسم نمودن خط بهترین برازش، اولین نقطه و آخرین نقطه

را به هم وصل کرد. آیا او خط بهترین برازش را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

خیر. نمی‌توان همچین کاری را انجام داد. زیرا نمودار برازش ربطی به انتها و ابتدای خط ندارد و بهترین خط با کمترین میزان خطا است.

۳ فعالیت

برخی تحقیقات در حوزه بانکداری نشان می‌دهند بین نرخ سود بانکی و میزان سرمایه‌ای که بانک جذب می‌کند همبستگی وجود دارد. یکی از بانک‌ها، میزان سرمایه خود را در زمان‌های مختلف که سود بانکی مختلفی پرداخت می‌کرده است، بررسی و در جدول زیر ثبت کرده است.

۱ به کمک excel خط بهترین برازش را برای این اطلاعات رسم کنید.



۲ اگر نرخ سود به ۱۰/۵ درصد تعیین شود، مقدار سرمایه جذب شده را پیش‌بینی کنید.

طبق معادله به دست آمده $y = -3.6301x + 57.992$ به جای x عدد ۱۰/۵ را قرار می‌دهیم.

$$y = -3.6301 \times 10.5 + 57.992 = 19.87595 \text{ میلیون تومان}$$

۳ اگر نرخ سود به ۱۲ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایه جذب شده را پیش‌بینی کنید.

$$y = -3/630 \times 12 + 57/992 = 14/4308$$

۴ اگر نرخ سود به ۱۸ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایه جذب شده را پیش‌بینی کنید.

$$y = -3/630 \times 18 + 57/992 = -7/3498$$

۵ در کدام حالت پیش‌بینی شما به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود؟ توضیح دهید.

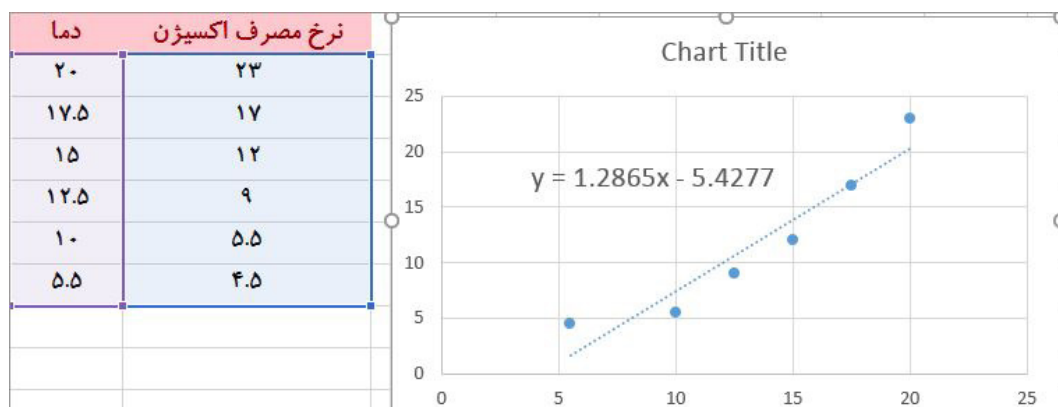
به نظر می‌رسد در حالت نرخ سود ۱۰/۵ درصد پیش‌بینی ما به واقعیت نزدیک‌تر است.

کار در کلاس ۲

دما (°C)	۲۰	۱۷/۵	۱۵	۱۲/۵	۱۰	۵/۵
نرخ مصرف اکسیژن (Mmol / Kg / Min)	۲۳	۱۷	۱۲	۹	۵/۵	۴/۵

میزان مصرف اکسیژن توسط خرچنگ‌ها و دمای آب با هم رابطه دارند. نرخ مصرف اکسیژن نوعی خرچنگ در زیر آب در جدول رو به رو آورده شده است.

۱ نمودار پراکنش و خط بهترین برازش این داده‌ها را رسم کنید.



۲ به کمک نمودار، مقدار تقریبی دما را در حالتی که نرخ مصرف اکسیژن ۱۴ Mmol / kg / Min است، پیدا کنید.

$$14 = 1/2865x - 5/4277 \Rightarrow 1/2865x - 14 - 5/4277 \Rightarrow x = 6/6632$$

۳ به کمک معادله خط بهترین برازش، نرخ مصرف اکسیژن این خرچنگ را در زیر آب در دماهای ۱۵°C، ۱۷°C، ۱۰°C و ۵°C پیش‌بینی کنید.

الف) $y = 0 = 5/4277 = -5/4277$

ب) $y = 1/2865 \times 17 - 5/4277 = 16/4428$

ج) $y = 1/2865 \times 50 - 5/4277 = 58/8973$

د) $y = 1/2865 \times 150 - 5/4277 = 187/5473$

۴ برای پیش‌بینی مقدار اکسیژن در کدام دماها از درون‌یابی و برای کدام دماها از برون‌یابی استفاده کردید؟

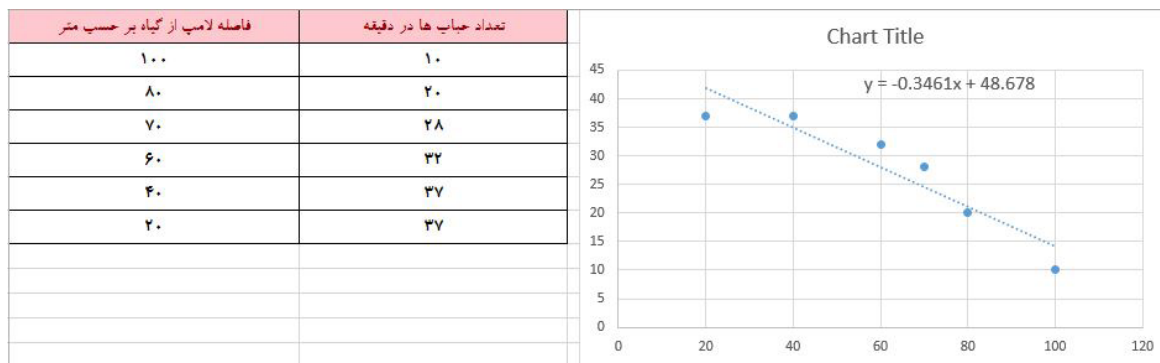
برای ۱۷°C از درون‌یابی استفاده کردیم و دماهای ۱۰°C و ۵°C و ۱۵۰°C از برون‌یابی استفاده کردیم.

۵ پیش‌بینی در کدام وضعیت با خطای زیاد همراه و یا آنکه غیر واقعی است؟ توضیح دهید.

در دمای ۱۵۰°C منفی شد که این امر غیرممکن است، همچنین در دمای ۵۰ و ۱۵۰ با خطای زیاد مواجه می‌باشد.

۱ مهرناز می‌خواهد آزمایشی انجام دهد که به کمک آن، تأثیر نور را بر سرعت غذاسازی توسط گیاه از طریق فتوسنتز بررسی کند. مهرناز لامپ را در ۱۰۰ متری گیاه قرار داد و تعداد حباب‌هایی را که توسط گیاه در یک دقیقه تولید شد شمرد. سپس لامپ را نزدیک‌تر کرده و در هر حالت، تعداد حباب‌های ایجاد شده توسط گیاه در دقیقه را شمرد. او نتایج را در جدول زیر ثبت کرد.

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.



ب) با استفاده از نمودار، جمله زیر را کامل کنید:

هر چه فاصله لامپ از گیاه کمتر باشد، سرعت فتوسنتز بیشتر است.

ب) اگر لامپ در ۱۰ سانتی‌متری گیاه قرار داشته باشد، تعداد حباب‌ها در دقیقه را پیش‌بینی کنید.

$$y = -0.3461x + 48.678$$

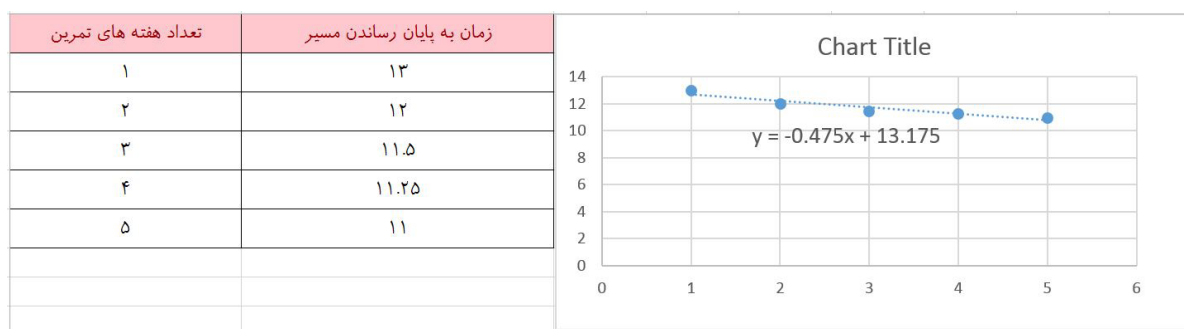
$$x = 10 \Rightarrow y = -0.3461 \times 10 + 48.678 = 45.217$$

ت) اگر لامپ را در ۲ سانتی‌متری گیاه قرار دهیم، برای پیدا کردن تعداد حباب‌هایی که گیاه تولید می‌کند از برون‌یابی استفاده می‌کنیم یا درون‌یابی؟ فکر می‌کنید در این وضعیت این پیش‌بینی چقدر درست باشد؟

از برون‌یابی استفاده می‌شود چون بازه صحیح $x \in [40, 100]$ است و محاسبه این عدد (۲ سانتی‌متری) با خطای زیادی همراه است.

۲ ایمان برای شرکت در مسابقات دو ۱۰۰ متر، تمرین می‌کند. جدول زیر، زمان به پایان رساندن مسیر را بر حسب ثانیه در پایان هر هفته تمرین نشان می‌دهد.

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.



ب) به کمک نمودار یا معادله خط بهترین برازش، زمان به پایان رساندن مسیر توسط ایمان پس از ۱۴ هفته را پیش‌بینی کنید.

$$y = -0.475x + 13.175 \xrightarrow{x=14} y = -0.475 \times 14 + 13.175 = 6.525$$

ب) آیا پیش‌بینی شما درست است؟ برای پاسخ به این سؤال رکورد جهانی دو ۱۰۰ متر مردان را از اینترنت پیدا کنید.

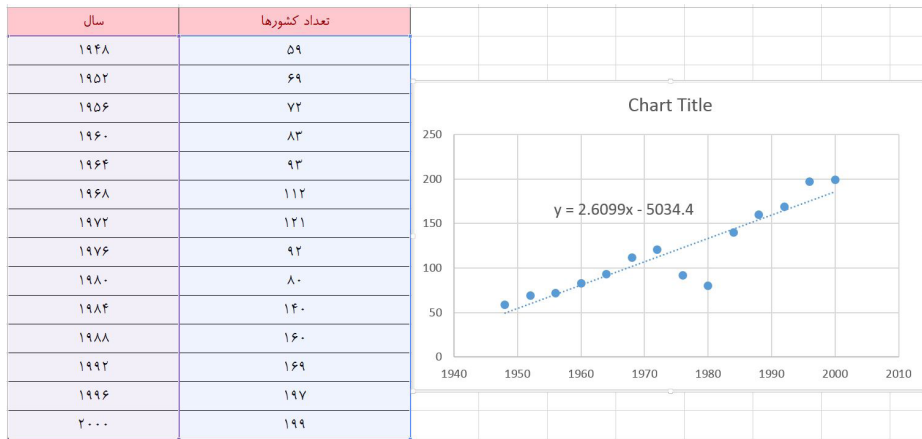
رکورد دو جهانی مردان ۹/۵۸ ثانیه است که بدیهی است این پیش‌بینی صحیح نمی‌باشد.

ت) برای این پیش‌بینی از درون‌یابی استفاده کردید یا برون‌یابی؟ آیا پاسخ به دست آمده معنادار است؟ توضیح دهید چرا؟

۱۴ چون در بازه بهتر قرار ندارد از برون‌یابی استفاده شده و همراه با خطا است. پس این جواب نمی‌تواند صحیح باشد.

۳ جدول زیر تعداد کشورهای شرکت کننده در المپیک تابستانی را از سال ۱۹۴۸ تا سال ۲۰۰۰ نشان می‌دهد.

(الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.



(ب) به کمک معادله خط بهترین برازش، تعداد کشورهای شرکت کننده در المپیک ۲۰۰۴ و المپیک ۲۰۱۶ را پیش‌بینی کنید.

$$y = 2/6099x - 5034/4 \xrightarrow{x=2004}$$

$$y = 2/6099 \times 2004 - 5034/4 = 195/8396 \approx 196 \text{ نفر}$$

$$x = 2016 \rightarrow y = 2/6099 \times 2016 - 5034/4 = 227/1584 \approx 227 \text{ نفر}$$

(پ) با مراجعه به اینترنت، تعداد کشورهای شرکت کننده در سال ۲۰۰۴ و سال ۲۰۱۶ را پیدا کنید. این تعداد را با پیش‌بینی‌های خودتان مقایسه کنید. در صورت وجود اختلاف، توضیح دهید چرا این اختلاف وجود دارد.

در سال ۲۰۰۴، ۲۰۲ شرکت کرده‌اند و طبق محاسبات می‌بایست ۱۹۶ کشور شرکت می‌کردند که خطا ۶ کشور است که می‌توان گفت پیش‌بینی خوبی می‌باشد، در سال ۲۰۱۶، ۲۰۷ کشور شرکت کرده‌اند و طبق پیش‌بینی ما ۲۲۷ نفر می‌بایست شرکت می‌کردند اما این نشان می‌دهد خطا پیش‌بینی‌ها زیاده‌تر شده و ما در سال ۲۰۱۶ از برون‌یابی استفاده کردیم.

(ت) به کمک معادله یا نمودار، تعداد کشورهای شرکت کننده در سال ۲۰۲۸ را پیش‌بینی کنید. آیا این پیش‌بینی معنادار است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$y = 2/6099x - 5034/4 \xrightarrow{x=2028} y = 2/6099 \times 2028 - 5034/4 \Rightarrow y = 258/4772 \approx 258 \text{ نفر}$$

این پیش‌بینی با خطا همراه است چون از برون‌یابی استفاده کردیم.

فعالیت ۴

۱ داده‌های ارائه شده در لیست حقوق کارکنان را از کم به زیاد مرتب کنید.

عنوان شغلی	میزان حقوق به نوسان از کم به زیاد
نگهبان	۰/۹
بایگانی	۱
منشی	۱/۱
مسئول فناوری	۱/۲
روابط عمومی	۱/۳
کارمند قرارداد	۱/۷
حسابدار	۱/۸
معاون	۳/۲
مدیرعامل	۵/۸

۲ عددی را پیدا کنید که تعداد حقوق‌های قبل از آن، با تعداد حقوق‌های بعد از آن برابر باشد.

کارمند روابط عمومی که مبلغ ۱/۳ میلیون را دریافت می‌کند کارمند است که تعداد حقوق قبل از آن به بعد از آن برابر است.



۱ تعداد روزهای مسافرت چند خانواده به صورت مقابل است. ۸، ۳، ۶، ۴، ۳، ۷، ۵، ۲ میانه این داده‌ها را بنویسید.

ابتدا داده‌ها را به صورت کم به زیاد مرتب می‌نماییم.

۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸

$$\text{میانه} = \frac{4+5}{2} = 4.5$$

۲ اگر تعداد داده بدون تکرار و زوج (فرد / زوج) باشد، میانه در داده‌ها قرار ندارد.

۳ داده‌های زیر تعداد شرکت کنندگان شهرهای مختلف را در یک مسابقه نشان می‌دهد و میانه داده‌ها عدد ۱۷ است. در دایره و مربع چه اعدادی می‌توانند قرار بگیرند؟ چرا؟

۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۳، ۱۴، ۱۵، $\bigcirc$ ، $\square$ ، ۱۸، ۱۹، ۱۹، ۲۰، ۲۰

چون تعداد شهرهای شرکت کننده فرد است. یعنی ۱۳ عدد است پس می‌بایست میانه در میان اعداد باشد و ۶ عدد در سمت راست آن و ۶ عدد در سمت چپ آن باشد پس می‌توان نتیجه گرفت $\bigcirc$ میانه ما می‌باشد و چون گفته میانه ۱۷ است پس $\bigcirc = 17$ می‌باشد، اما در مورد $\square$

$$\bigcirc = 17$$

$$\square = 17 \text{ یا } 18$$

می‌توان گفت می‌تواند هم ۱۷ و هم ۱۸ باشد پس داریم:

مسائل



۱ مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها نباشد و مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها باشد.

۲، ۳، ۶، ۹، ۱۰، ۱۲

الف) اگر تعداد داده‌های ما زوج باشد میانه در بین اعداد وجود ندارد مثلاً:

$$\text{میانه} = \frac{6+9}{2} = 7.5$$

ب) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد میانه بین اعداد وجود دارد.

۶، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۵

$$\text{میانه} = 19$$

۲ اگر همه داده‌ها ۲ برابر شوند، میانه چه تغییری می‌کند؟

اگر تمام اعداد در ۲ ضرب بشود و میانه نیز در ۲ ضرب می‌شود.

۳ در جلسه‌های تمرین پرتاب نیزه، دو ورزشکار، پرتاب‌های مختلفی انجام داده‌اند. مسافت پرتاب شده توسط آنها بر حسب متر به صورت زیر است:

ورزشکار اول: ۷۰، ۶۵، ۶۰، ۷۲، ۶۳، ۷۱، ۶۶، ۶۹، ۵۸، ۶۶، ۵۵، ۷۰، ۷۰

ورزشکار دوم: ۷۵، ۶۰، ۷۰، ۷۲، ۶۵، ۷۱، ۶۵، ۶۸، ۵۸، ۵۹، ۶۸، ۷۰

میانه پرتاب دو ورزشکار را با هم مقایسه کنید. توضیح دهید در این مسئله، میانه چه چیزی را نشان می‌دهد. عملکرد کدام یک را بهتر ارزیابی می‌کنید؟

ابتدا داده‌های هر دو ورزشکار را از کم به زیاد مرتب می‌کنیم و میانه آنها را به دست می‌آوریم.

۶۶: میانه $\Rightarrow 72, 71, 70, 70, 69, 66, 66, 65, 63, 60, 58, 55$: ورزشکار اول

$$68: \text{میانه} \Rightarrow 75, 72, 71, 70, 70, 68, 68, 65, 65, 60, 59, 58: \text{ورزشکار دوم}$$

بدیهی است میانه پرتاب‌های ورزشکار دوم بیشتر است پس عملکرد ورزشکار دوم بهتر می‌باشد.

۴ داده‌های مقابل را در نظر بگیرید: ۳, ۵, ۸

(الف) میانگین و میانه این داده‌ها را حساب کنید.

میانه = ۵

$$\text{میانگین} = \frac{۳+۵+۸}{۳} = ۵/۳۳$$

(ب) در داده‌ها به جای عدد ۸، عدد ۹۰ را بنویسید و مجدداً میانگین و میانه را حساب کنید.

۳, ۵, ۹۰

$$\text{میانگین} = \frac{۳+۵+۹۰}{۳} = ۳۲/۶۶$$

میانه مجدداً ۵ است.

با توجه به تغییرات انجام شده در قسمت «ب» به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

(پ) با تغییر یکی از داده‌ها (میانه / میانگین) همواره تغییر می‌یابد.

میانه لزوماً عوض نمی‌شود ولی امکان دارد که عوض بشود (مثلاً اگر عدد وسط عوض می‌شد میانه عوض می‌شد) اما اگر یکی از داده‌ها عوض شود مطمئناً میانگین عوض می‌شود.

(ت) میانه به کوچکی و بزرگی داده‌های قبل و بعد از خود بستگی (دارد / ندارد).

اگر تعداد داده‌ها فرد باشد که در این مثال هست می‌توان گفت با تغییر اعداد بعد یا قبل از میانه، میانه تغییر نمی‌کند.

۵ میانه نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۲۵ نفری، برابر ۱۷ است. میانه چه اطلاعاتی درباره نمره‌های کلاس به شما می‌دهد؟

میانه این کلاس ۲۵ نفری به ما می‌گوید نمره نفر سیزدهم برابر ۱۷ است (چون تعداد نفرات فرد است) و ۱۲ نفر نمره‌هایشان کمتر از ۱۷ بوده و ۱۲ نفر بیشتر از ۱۷ بوده است.

۶ میانه نمرات ریاضی در دو کلاس، ۱۷ و ۱۲ است. وضعیت نمرات دو کلاس را توصیف کنید.

اگر فرض کنیم تعداد نفرات دو کلاس با هم برابر باشد می‌توان گفت نیمی از دانش‌آموزان کلاس اول نمره ریاضی‌شان بالای ۱۷ و نیمی از نفرات کلاس دوم نمره ریاضی آنها بالای ۱۲ است.

۷ میانگین ۵ داده برابر با ۱۷ و میانه آنها ۱۴ است. ۵ عدد مثال بزنید که این شرایط را داشته باشند. این مسئله چند جواب می‌تواند داشته باشد؟

چون میانه آنها ۱۴ است پس می‌توان گفت عدد سوم برابر ۱۴ است و a و b کوچکتر از ۱۴ و c و d بزرگتر از ۱۴ است. $a, b, ۱۴, c, d$ همچنین گفته شده است میانگین این اعداد ۱۷ است پس داریم:

$$\frac{a+b+۱۴+c+d}{۵} = ۱۷ \Rightarrow a+b+۱۴+c+d = ۸۵ \Rightarrow a+b+c+d = ۷۱$$

مثلاً ۵, ۱۰, ۱۴, ۲۰, ۳۶

مثلاً

بدیهی است تعداد زیادی عدد را می‌توان به جای a و b و c و d قرار داد فقط با این شرط که:

$$a, b, ۱۴, c, d \text{ و } a+b+c+d=۷۱$$

فعالیت ۵

نمره‌های مرتب شده درس ریاضی کلاس «کوشش» به صورت زیر است:

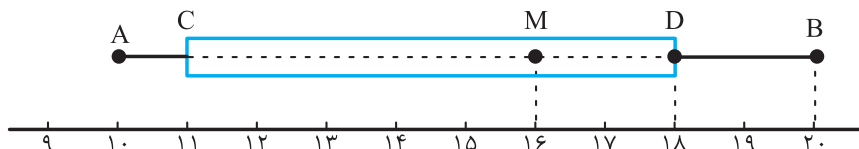
۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۲, ۱۲, ۱۵, ۱۵, ۱۷, ۱۷, ۱۷, ۱۷, ۱۹, ۱۹, ۲۰, ۲۰

۱ میانه نمره‌ها را با نقطه‌ای به نام M روی خط‌چین زیر مشخص کنید.

۲ برای اعداد قبل از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خط‌چین با نقطه C مشخص کنید همچنین برای اعداد بعد از میانه،

دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خط‌چین با نقطه D مشخص کنید.

۳ کمترین نمره را با نقطه A و بیشترین نمره را با نقطه B روی خط‌چین مشخص کنید.



۴ مستطیلی رسم کنید که نقاط C و D روی عرض‌های این مستطیل (جعبه) قرار گیرند. پاره‌خطی از A به C و پاره‌خطی از B به D وصل کنید. درصد تعداد نمرات دانش‌آموزان در هر بازه را پیدا کرده و در جدول زیر کامل کنید.

بازه نمرات	قبل از C	بین C و D	قبل از D	بعد از D
درصد تعداد نمرات هنرجویان	$\frac{4}{16} \times 100 = 25\%$	$\frac{8}{16} \times 100 = 50\%$	$\frac{12}{16} \times 100 = 75\%$	$\frac{4}{16} \times 100 = 25\%$

کار در کلاس ۴

۱ میزان بارندگی (بر حسب میلی‌متر) در یک شهر طی ۱۵ روز به صورت زیر گزارش شده است:

۱۶, ۳, ۲, ۸, ۰, ۵, ۲۵, ۱۵, ۱۲, ۰, ۹, ۱, ۵, ۰, ۲

۰, ۰, ۰, ۱, ۲, ۳, ۵, ۵, ۸, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۶, ۲۵

Q_1 M Q_3
 ۰, ۰, ۰, ۱, ۲, ۳, ۵, ۵, ۸, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۶, ۲۵

$$M = 5, Q_1 = 1, Q_3 = 12$$

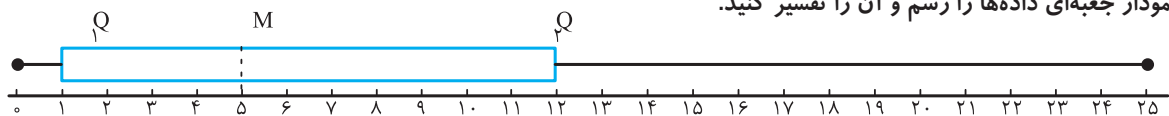
$$\frac{7}{15} \times 100 = 46\% / 66\%$$

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم از کم به زیاد

الف) چارک اول، میانه و چارک سوم چه اعدادی هستند؟

ب) تقریباً چند درصد داده‌ها بین Q_1 و Q_3 قرار دارند؟

پ) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم و آن را تفسیر کنید.



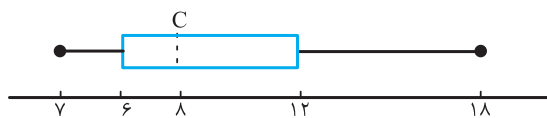
میزان بارش نیمی از شهرها کمتر از ۵ میلی‌متر بوده و نیمی بیشتر از ۵ بوده و همچنین می‌توان گفت حدود $\frac{1}{4}$ از شهرها بارندگیشان ۰ یا ۱ بوده و نیمی از شهرها بین ۱ و ۲۱ بوده و می‌توان گفت $\frac{1}{4}$ شهرها بزرگتر از ۱۲ بوده است.

۲ یک شرکت بیمه می‌خواهد بررسی‌هایی را برای پرداخت هزینه‌های

بستری بیماران دچار حمله قلبی انجام دهد. بعد از آنکه مدت بستری شدن

(بر حسب روز) تعدادی بیمار پس از حمله قلبی در یک بیمارستان مشخص

شد نمودار جعبه‌ای آن را به صورت زیر رسم کرده‌اند:



الف) میانه داده‌ها چند است؟ $M = 8$

ب) چارک اول چند است؟ چند درصد داده‌ها قبل از آن و چند درصد بعد از آن قرار دارند؟

$Q_1 = 6$ و حدود ۲۵٪ داده‌ها قبل از ۶ و ۷۵٪ بعد از ۶ می‌باشد.

پ) مقدار Q_3 چند است؟ این عدد نشان‌دهنده چیست؟

$Q_3 = 12$ نشان می‌دهد ۲۵٪ داده‌ها بعد از آن قرار دارند و ۷۵٪ داده‌ها قبل از آن

ت) چند درصد داده‌ها درون جعبه قرار دارند؟ ۵۰٪

ث) بلندتر بودن دنباله سمت راست جعبه نشان‌دهنده چیست؟

۲۵ درصد افراد بین میانه و چارک سوم قرار دارند که پراکندگی بیشتری دارند.

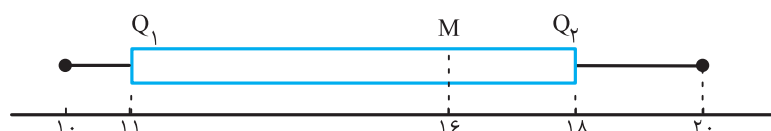
۳ نمودار جعبه‌ای فهرست نمرات کلاس‌های تلاش و کوشش (در ابتدای این بخش) را رسم کنید. سپس با مقایسه این نمودارها، به نظر

شما کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟

الف) کلاس کوشش: ابتدا داده‌ها را مرتب می‌نماییم.

۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۲, ۱۲, ۱۵, ۱۵, ۱۷, ۱۷, ۱۷, ۱۷, ۱۹, ۱۹, ۲۰, ۲۰

$$M = \frac{15+17}{2} = 16 \quad Q_1 = \frac{10+12}{2} = 11 \quad Q_3 = \frac{17+19}{2} = 18$$



9, 13, 14, 14, 14, 14, 14.5, 14.5, 18, 18, 18, 19, 19, 19.5, 19.5

مسائل

A horizontal number line with tick marks at 4, 5, 6, 7, 8, 9, and 10. A blue rectangular box is drawn above the line, spanning from 5 to 9. A vertical dashed line is drawn through the center of the box at the number 7.

(پ) چند درصد از نمره‌ها قبل از Q_3 قرار دارند؟ $\frac{3}{4} = 75\%$

کلاس ۱

کلاس ۲

0 5 10 15 20

کلاس ۱. زیرا تقریباً ۷۵٪ از نمرات کلاس ۱ بیشتر از نیمی از کلاس ۲ است.

۴ غلظت قند خون ۱۲ نفر (برحسب mMdm^{-2})، ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا اندازه گیری شده است. نتایج به دست آمده به شرح زیر است.

۳/۷	۵/۱	۴/۶	۳/۹	۳/۸	۴/۲
۳/۹	۴/۰	۵/۲	۴/۷	۴/۰	۳/۸

الف) میانه و چارک‌های اول و سوم را پیدا کنید.

ابتدا داده‌ها را از کم به زیاد مرتب می‌نماییم.

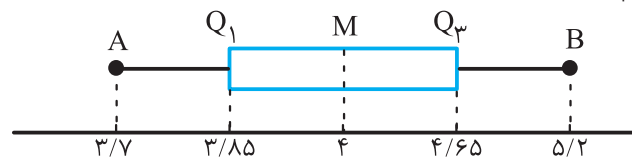
۳/۷, ۳/۸, ۳/۸, ۳/۹, ۳/۹, ۴, ۴, ۴/۲, ۴/۶, ۴/۷, ۵/۱, ۵/۲

$$M = \frac{4+4}{2} = 4, \quad Q_1 = \frac{3/8+3/9}{2} = 3/85$$

$$Q_3 = \frac{4/6+4/7}{2} = 4/65$$

ب) اگر غلظت قند خون شما، ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا ۴/۱ باشد، وضعیت خود را نسبت به این افراد توصیف کنید.

ابتدا نمودار جعبه‌ای را رسم می‌نماییم.



اگر قند خون ما ۴/۱ باشد می‌توان گفت قند خون ما از نیمی از افراد بیشتر است.



۵) سجاد در رشته کشاورزی تحصیل می‌کرد. او تنوع تعداد نخودهای موجود در غلاف‌ها را

بررسی کرد. تعداد نخودهای موجود در ۱۷ غلاف به شرح زیر است.

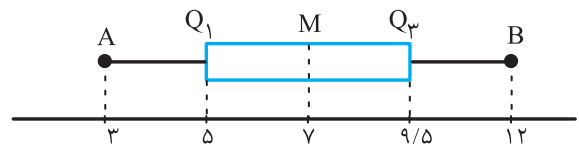
۷, ۹, ۱۰, ۷, ۸, ۹, ۵, ۶, ۵, ۱۱, ۳, ۴, ۱۰, ۱۲, ۸, ۵, ۴

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم و تفسیر کنید.

ابتدا داده‌ها را به ترتیب از کم به زیاد می‌نویسیم.

۳, ۴, ۴, ۵, ۵, ۵, ۶, ۷, ۷, ۸, ۸, ۹, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۲

$$M = 7, \quad Q_1 = \frac{5+5}{2} = 5, \quad Q_3 = \frac{9+10}{2} = 9/5$$



نیمی از غلاف‌ها بیشتر از ۷ نخود در خود دارند و نیمی کمتر از ۷، همچنین $\frac{1}{4}$ غلاف‌ها بین ۳ تا ۵ و $\frac{1}{4}$ بین ۵ تا ۷ و $\frac{1}{4}$ دیگر بین ۷ تا ۹/۵ و

$\frac{1}{4}$ نیز بین ۹/۵ تا ۱۲ نخود در خود دارند. همچنین می‌توان گفت $\frac{3}{4}$ غلاف‌ها بیشتر از ۵ نخود دارند.