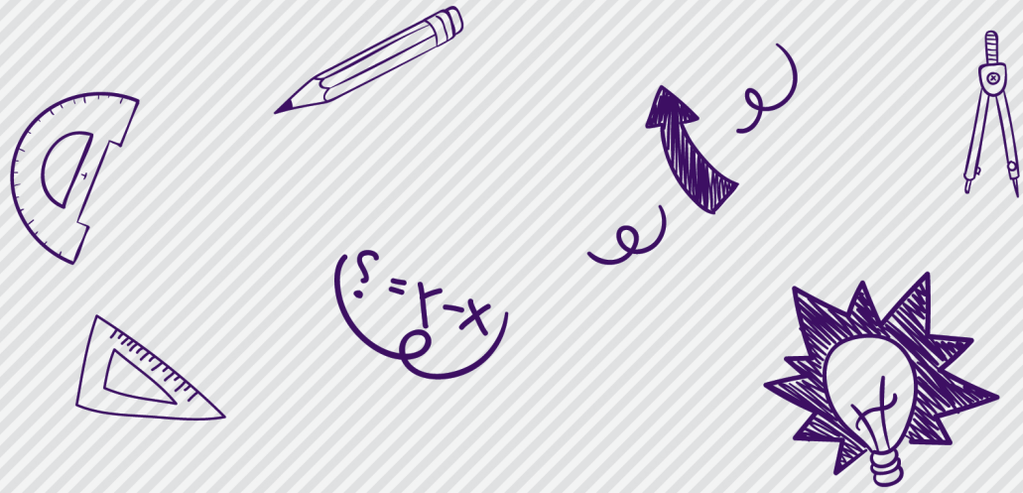
کار آموزشی

# ریاضی نهم ۹

مؤلفان: محمدرضا اریسی، محمدهادی ابراهیمی



- آموزش کامل کتاب درسی
- مثال‌های آموزشی با پاسخ تشریحی
- آزمون‌های مستمر درس به درس
- آزمون‌های پایان فصل
- پرسش‌های امتحانی صحیح – غلط، کامل کردنی، وصل کردنی، چهارگزینه‌ای، تشریحی
- آزمون‌های میان نوبت اول و دوم
- آزمون‌های نوبت اول و دوم

**سرشناسه**: اریسی،محمدرضا، ۱۳۵۲
**عنوان و نام پدیدآور**: کار آموزشی ریاضی نهم
**مشخصات نشر**: تهران: انتشارات کامل طلایی، ۱۳۹۶
**مشخصات ظاهری**: ۲۸۰ص؛ ۲۲×۲۹ س م.
**شابک**: ۹۷۸-۶۰۰-۵۱۶۶-۳۸-۵
**وضعیت فهرست‌نویسی**: فیپای مختصر
**یادداشت**: فهرستنویسی کامل این اثر در نشانی http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.
**شناسه افزوده**: ابراهیمی، محمدهادی، ۱۳۵۲ -
**شماره کتابشناسی**: ۴۶۰۸۱۶۲

# کار آموزشی ریاضی نهم

ناشر: انتشارات آخر ـ انتشارات کامل طلایی (شماره پروانه نشر ۱۴۲۵۹)
مولفان: محمد هادی ابراهیمی - محمدرضا اریسی
مدیر تولید: فتوحی
نوبت چاپ: چهارم ۱۳۹۹
شمارگان: ۲۵۰۰ نسخه
قیمت: ۷۰۰۰۰ تومان

کلیه حقوق این اثر متعلق به انتشارات کامل طلایی به شماره پروانه نشر ۱۴۲۵۹ است و هرگونه نسخه‌برداری و برداشت به هر صورت و شیوه به موجب بند ۵ از ماده‌ی ۲ قانون حمایت از ناشران قابل پیگرد است.

آدرس: خیابان انقلاب - خیابان ۱۲ فروردین - بعد از خیابان جمهوری - خیابان کمالزاده غربی - پلاک ۴۹
تلفن: ۶۶۴۵۶۶۴۲-۰۲۱

# مقدمه

هدف عالی زندگی علم نیست بلکه عمل است.

خدای مهربان را سپاس می‌گوییم که توفیق نگارش این مجموعه را به ما عطا کرد تا به اندازه‌ی توان خود کمکی هر چند کوچک در جهت ارتقای علمی و بهبود فرآیند یادگیری این درس به دانش‌آموزان عزیز کرده باشیم تغییرات جدید نظام آموزشی کشور و از آن مهم‌تر تغییر در نگاه کتاب‌های ریاضی جدید که بیش‌تر بر مبنای درک مفهومی و پرهیز از حفظ الگوها و کلیشه‌هاست، این ضرورت را ایجاد می‌کند که در یاددهی و یادگیری ریاضی به این سمت حرکت کنیم و با توجه به استانداردهای جهانی آموزش هدف‌های خود را تعیین و دنبال نماییم در این مجموعه سعی شده است که اهداف مورد نظر کتاب درسی با مثال‌ها و تمرین‌های حل‌شده‌ی فراوان و توضیحات واضح تأمین شود هم‌چنین برای دانش‌آموزان علاقه‌مند و کوشا قسمت‌هایی تحت عنوان آموزش تکمیلی (تیزهوشان) به همراه سؤالات چهارگزینه‌ای پاسخ‌دار در نظر گرفته شده است تا در پایان هر فصل و بعد از یادگیری سطح عمومی کتاب به این بخش که شامل نکات و مطالب ویژه و سودمندی است بپردازند.

از همکاران فرزانه و دلسوزمان و دانش‌آموزان دقیق و نکته‌سنج نیز خواهشمندیم نظرات خود را در جهت ارتقا و بهبود این کتاب از ما دریغ نفرمایند.

«من لَم یَشکُرِ المخلُوق لَم یَشکُرِ الخالِق»

**محمدرضا اریسی ـ محمدهادی ابراهیمی**

**جهت هر گونه پیشنهاد، انتقاد و ارتباط با مؤلفین از طریق این ایمیل با ما در تماس باشید.** Email: kamel.talaee@yahoo.com

# مقدمه کاربردی

**بخش عمومی:**

**آموزش:**

آموزش کامل کتاب درسی به صورت درس به درس به همراه مثال‌های حل شده جهت یادگیری بهتر.

**مثال‌های آموزشی:**

مثال‌هایی با حل تشریحی جهت تسلط بر انتقال یادگیری به حل تمرینات و یادگیری نظم نوشتن راه‌حل‌ها.

**آزمون مستمر:**

آزمون‌هایی در پایان هر درس به جهت سنجش میزان یادگیری.

**پرسش‌های امتحانی:**

پرسش‌هایی در غالب‌های متفاوت جهت آشنایی با سؤالات امتحانی در آزمون‌ها.

**آزمون پایان فصل:**

آزمون‌هایی برای جمع‌بندی و سنجش یادگیری در پایان هر فصل.

**آزمون‌های میان‌نوبت و نوبت اول و دوم:**

آزمون‌هایی جهت مرور و دوره‌ی مطالب آموخته شده و ایجاد آمادگی جهت حضور در امتحانات میان‌نوبت و نوبت اول و دوم.

# فهرست

فصل اول: مجموعه‌ها ۶

فصل دوم: عددهای حقیقی ۳۴

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه ۶۴

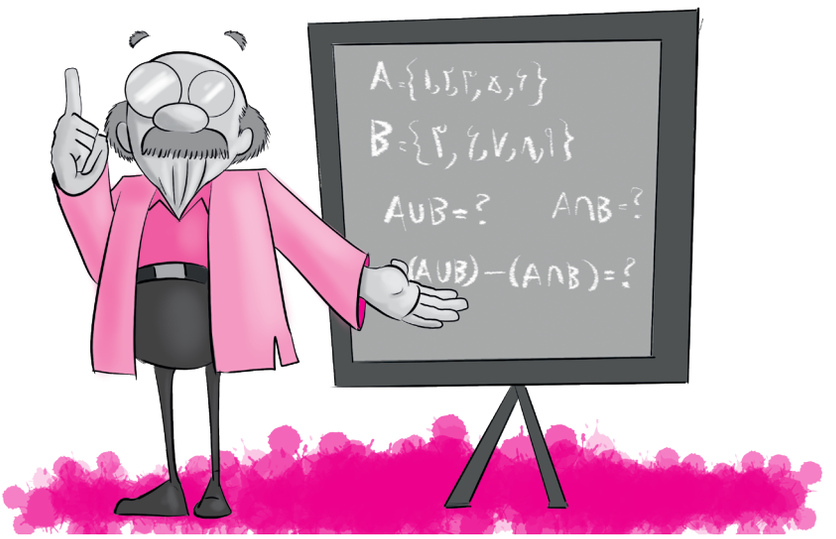
فصل چهارم: توان و ریشه ۹۲

فصل پنجم: عبارت‌های جبری ۱۲۶

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی ۱۵۴

فصل هفتم: عبارت‌های گویا ۱۹۸

فصل هشتم: حجم و مساحت ۲۳۰




# فصل اول

## مجموعه ها


درس اول: معرفی مجموعه‌ها

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

آزمون‌های پایانی فصل اول

آموزش تکمیلی

تمرین های تکمیلی

پرسش های چهار گزینه ای + پاسخ تشریحی

# درس اول: معرفی مجموعه‌ها

## آموزش

**مجموعه:** برای مجموعه تعریف دقیقی وجود ندارد. امّا واژه‌ی مجموعه را در ریاضی می‌توان، بیان و نمایش دسته یا گروهی از اعداد، اشیاء، موجودات و ... که دارای ویژگی مشترک، کاملاً مشخص و غیر تکراری باشند، استفاده کرد. بنابراین مجموعه دسته یا گروهی است که اعضای آن کاملاً مشخص باشند.

**علامت مجموعه:** مجموعه را با { } (آکولاد) نمایش می‌دهیم که اعضای مجموعه داخل آن قرار می‌گیرند.
نام‌گذاری: مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم.

**مثال:** $C=\{۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶\}$ $B=\{\square,\diamond,\square\}$ $A=\{$مجید ، احمد ، رضا$\}$

**نکته** اعضای مجموعه باید کاملاً مشخص باشند و اگر در نظر افراد متفاوت باشد و به سلیقه و نظر آن‌ها بستگی داشته باشد مجموعه نمی‌باشد.

**مثال:** عددهای بسیار بزرگ ـ دانش‌آموزان خوب مدرسه ـ غذاهای خوشمزه ـ سه عدد زوج متوالی مجموعه محسوب نمی‌شوند.

**نکته** ۱) اعضای یک مجموعه را با «،» یا « و » از هم جدا می‌کنیم.
۲) تکرار در اعضای مجموعه مؤثر نمی‌باشد.

**مثال:** $A=\{۲,۳,۲,۷,۳\}=\left\{\frac{۴}{۲},\frac{-۹}{-۳},\frac{۷۰}{۱۰},\sqrt{۹},۷\right\}=\{۲,۳,۷\}$

**نکته** ترتیب در اعضای مجموعه موثر نیست. یعنی با جابجایی اعضای مجموعه، مجموعه‌ی جدید ساخته نمی‌شود.

**مثال:** $B=\{-۳,۲,۷\}=\{۷,-۳,۲\}=\{۲,۷,-۳\}$

**عضو مجموعه:** هر یک از عددها، اشیاء، موجودات و ... که درون یک مجموعه قرار گرفته‌اند، عضو آن مجموعه نامیده می‌شود.
عضو بودن را با علامت «$\in$» و عضو نبودن را با علامت «$\notin$» نمایش می‌دهند.

**مثال:** با توجه به مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

$۰\notin A$ (۰ عضو A نیست.) $۴\in A$ (۴ عضو A است.)
$۲\in A$ (۲ عضو A است.) $۱۰\notin A$ (۱۰ عضو A نیست.)

**نمایش مجموعه:**

**۱) تفصیلی (عضوی):** در این نوع نمایش، عضوهای مجموعه به طور مشخص درون آکولاد نوشته می‌شود و یا به صورت کلامی معرفی می‌شوند.

**مثال:** $\{۲,۳,۵,۷\}=$ مجموعه‌ی عددهای اول یک رقمی $\{۱,۲,۵,۱۰\}=$ مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی ۱۰

**۲) (نمودار وِن):** در این نوع نمایش عضوها درون یک شکل بسته نمایش داده می‌شوند.

**مثال:**

**۳) نمادین (علائم یا زبان ریاضی):** برای معرفی عضوهای مجموعه را با علائم ریاضی معرفی می‌کنند.

**تعداد عضوهای مجموعه:** تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را «**عدد اصلی A**» نامیده و به صورت $n(A)$ نمایش می‌دهند.

**مثال:** اگر مجموعه‌ی A دارای ۵ عضو باشد در نتیجه: $n(A)=5$

به نوعی مجموعه‌ها از نظر تعداد عضو یا عدد اصلی به سه دسته تقسیم می‌شوند.

**۱) مجموعه‌ی تهی:** مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد و عدد اصلی آن صفر می‌باشد. مجموعه‌ی تهی را با $\{\ \}$ یا $\varnothing$ نمایش می‌دهند. $n(\varnothing)=0$

**مثال:** $\varnothing$ = مجموعه‌ی عددهای طبیعی کوچکتر از یک $\{\ \}$ = مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۷ و ۸

**۲) مجموعه‌ی متناهی (پایان دار):** مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن محدود و قابل شمارش می‌باشد.

$\{-2,-4,-6,-8\}$ = مجموعه‌ی عددهای صحیح منفی زوج یک رقمی

$\{5\}$ = مجموعه‌ی عددهای اول مضرب ۵

{بهار ، تابستان ، پاییز ، زمستان} = مجموعه‌ی فصل‌های سال

مجموعه‌های یک عضوی را «**مجموعه‌ی یکانی**» می‌نامند.

**مثال:** $A=\{\square\}$ $\quad H=\{0\}$ $\quad F=\{-4\}$

در مجموعه‌های متناهی اگر تعداد عضوها زیاد بود می‌توان سه عضو اول را نوشته، سه نقطه قرار داده، سپس عضو آخر را نوشت.

**مثال:** $\{1,2,3,...,99\}$ = مجموعه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰

**۳) مجموعه‌ی نامتناهی (بی‌پایان):** مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن نامحدود و غیر قابل شمارش می‌باشد.

در مجموعه‌های نامتناهی چون تعداد عضوها بی‌شمار است، می‌توان سه عضو اول را نوشته و سه نقطه قرار داد.

**مثال:** $\{-1,-2,-3,...\}$ = مجموعه‌ی عددهای صحیح منفی $\quad \{2,4,6,...\}$ = مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج

## مثال های آموزشی

**۱** **مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان نمایش دهید.**

**الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی مضرب ۳ کوچک‌تر از ۲۰.** **ب) مجموعه‌ی عددهای اول دو رقمی بزرگ‌تر از ۵۰ و کوچک‌تر از ۸۵.**

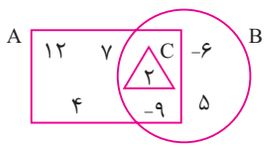
**پ) مجموعه‌ی عددهای صحیح بین ۴- و ۵-.** **ت) مجموعه‌ی عددهای صحیح منفی کوچک‌تر از ۱۰-.**

**پاسخ :**

الف) $\{3,6,9,12,15,18\}$ ب) $\{53,59,61,67,71,73,79,83\}$

پ) $\{\ \}$ یا $\varnothing$ ت) $\{-11,-12,-13,...\}$

**۲** **با توجه به شکل مقابل، مجموعه‌های خواسته شده را با عضوهایشان نمایش دهید.**




**الف) مجموعه‌ی A** **ب) مجموعه‌ی B**

**پ) مجموعه‌ی C** **ت) مجموعه‌ی عضوهای مشترک بین A و B**

**پاسخ :**

الف) $A=\{-9,2,4,7,12\}$ ب) $B=\{-9,-6,2,5\}$

پ) $C=\{2\}$ ت) $\{-9,2\}$

**۳** مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی ۱۲ را نوشته و آن را $M$ بنامید. سپس درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را مشخص کنید.

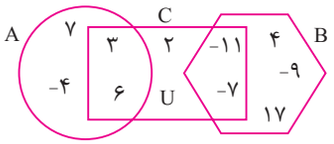
الف) $۳ \in M$ ب) $-۲ \notin M$ پ) $۱ \notin M$

ت) $۱۲ \in M$ ث) $۰ \in M$ ج) $۶ \in M$

پاسخ : $M = \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

الف) ✓ ب) ✓ پ) ✗ ت) ✓ ث) ✗ ج) ✓

**۴** با توجه به شکل مقابل در جاهای خالی علامت مناسب $(\notin, \in)$ قرار دهید.

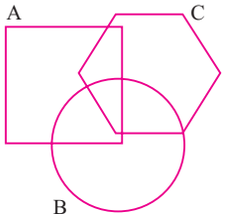



الف) $۶ \square C$ ب) $-۴ \square A$ پ) $-۱۱ \square A$

ت) $۳,۷ \square B$ ث) $-۷ \square B,C$ ج) $۱۷ \square C,B,A$

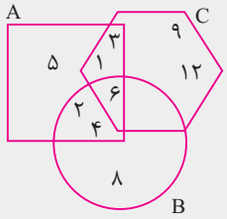
پاسخ : ج) $\notin$ ث) $\in$ ت) $\notin$ پ) $\notin$ ب) $\in$ الف) $\in$

**۵** با توجه به مجموعه‌های زیر، شکل مقابل را کامل کنید.




$A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ $C = \{۱,۳,۶,۹,۱۲\}$

پاسخ :




## تمرین

**۱** مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان بنویسید.

الف) مجموعه‌ی اعداد اوّل بین ۳۰ و ۵۰ $A = \{\quad\}$

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچک‌تر از ۳- $B = \{\quad\}$

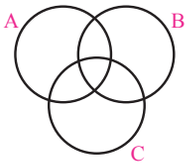
پ) مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی ۳۰ $C = \{\quad\}$

**۲** مجموعه اعداد صحیح بین ۴- و ۳ را نوشته آن را $M$ بنامید. درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را مشخّص کنید.

$-۴ \in M$ ☐ $۰ \in M$ ☐ $-۳ \in M$ ☐

$۳ \notin M$ ☐ $۹ \notin M$ ☐ $۲ \notin M$ ☐

**۳** مجموعه‌های زیر را در نمودار ون مقابل نشان دهید.

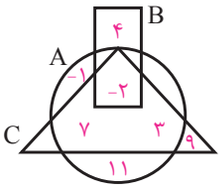



$A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$

$B = \{-۱,۰,۱,۲\}$

$C = \{۱,۳,۰,۶,-۴\}$

**۴** با توجّه به نمودار مقابل، در جاهای خالی علامت مناسب ( $\notin, \in$ ) قرار دهید.




$-۱ \square B$ $\quad -۲ \square A,C$

$-۲,۳ \square A,B$ $\quad ۹,۱۱ \square C$

**۵** کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

الف) مجموعه‌ی اعداد اوّل مضرب ۶

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی بزرگ‌تر از ۱-

پ) مجموعه‌ی شمارنده‌های اوّل ۲۰

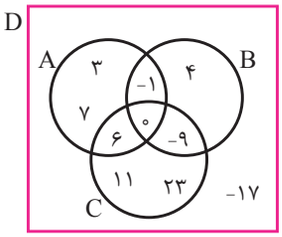
**۶** کدام‌یک از جمله‌های زیر یک مجموعه تشکیل می‌دهند؟

الف) سه عدد اوّل یک رقمی

ب) مضرب‌های اوّل ۷

پ) دو فصل از سال

**۷** با توجّه به نمودار ون مقابل، تساوی‌های زیر را کامل کنید.




$n(A) =$ $\quad n(D) =$

$n(B) =$ $\quad n(\varnothing) =$

$n(C) =$

**۸** هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارند؟

$A = \left\{۵, \sqrt{۲۵}, \frac{-۲۵}{۵}, (-۱)^۵, -\frac{۱۰}{۲}\right\}$

$B = \left\{۱^۱, (-۱)^۲, ۱^۳, (-۱)^۴, \ldots\right\}$

$C = \{۱,۲,\{۱\,۲\}\}$

**۹** مقدار مجهول‌ها را طوری به‌دست آورید که مجموعه‌های زیر تک عضوی باشند.

$M = \{-۳, x+۲\}$

$N = \{۳y, y-۸\}$

$P = \{z^۲, ۳۶, ۶z\}$

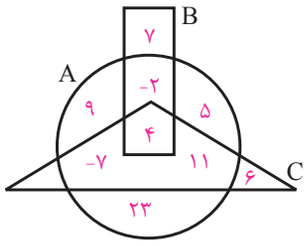
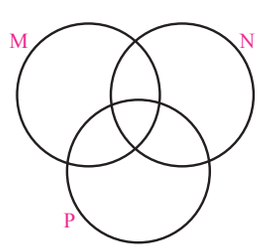
**۱۰** در جاهای خالی علامت مناسب ( $\notin, \in$ ) قرار دهید.

الف) $۷ \square \left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۲}, \frac{۳}{۲}, \ldots\right\}$

ب) $-۳ \square \left\{\sqrt{۸}, \sqrt{۷}, \sqrt{۶}, \ldots\right\}$

پ) $۱۰۰ \square \left\{۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, \ldots\right\}$

| فصل اول: مجموعه‌ها | بسمه‌تعالی - آزمون مستمر ریاضی پایهٔ نهم | تاریخ: / / |
|---|---|---|
| درس ۱: معرفی مجموعه‌ها | نام و نام خانوادگی: کلاس: ۹/ | زمان: ۳۰ دقیقه |

| ردیف | نماز، پرچم اسلام است. مؤمن واقعی، کسی است که دل به آن دهد و مراقب حدود و آداب و وقت آن باشد. رسول اکرم (ص) | شمارک |
|---|---|---|
| ۱ | مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان نوشته و تعداد عضوهای آنها را مشخّص کنید.<br>الف) عددهای صحیح بین ۴- و ۳<br>ب) عددهای اوّل زوج<br>پ) شمارنده‌های ۱۸<br>ت) عددهای طبیعی کم‌تر از ۱ | ۱<br>۱<br>۱<br>۱ |
| ۲ | با توجّه به شکل مقابل، در جاهای خالی علامت مناسب ( $\in, \notin$ ) قرار دهید.<br>  <br><br>$-۷ \square C$ ۱۱ $\square$ B<br>$۷,۲۳ \square B,C$ $۹,۵ \square A$<br>$۴ \square A,B,C$ $-۲ \square A,C$ | ۱<br>۱<br>۱ |
| ۳ | با توجّه به مجموعه‌های زیر، نمودار مقابل را کامل کنید.<br>  <br><br>$M = \{۱,۰,۵,۴,۳\}$<br>$N = \{۰,-۱,-۲,-۳,۵\}$<br>$P = \{-۱,۰,۱,۲\}$ | ۱<br>۱<br>۱ |

# درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

## آموزش

**دو مجموعه‌ی برابر:** دو مجموعه را برابر گویند هر گاه همه‌ی عضوهایشان یکسان باشند.

**مثال:**

$$A=\{۲,۳\},\quad B=\left\{\frac{۴}{۲},\sqrt{۹}\right\}\Rightarrow A=B$$

اگر عضوی در $A$ باشد که در $B$ نباشد یا در $B$ عضوی باشد که در $A$ نباشد، در این صورت $A$با $B$ برابر نیست.

**مثال:**

$$A=\{-۴,۷\},\quad B=\{-۳,۴,۷\}\Rightarrow A\neq B$$

**زیر مجموعه:** مجموعه‌ی $B$ را زیر مجموعه‌ی $A$ گوییم هرگاه همه‌ی عضوهای $B$ داخل $A$ باشند و آن را به صورت $B\subseteq A$ نمایش می‌دهیم.

زیرمجموعه بودن را با«$\subseteq$» و زیر مجموعه نبودن را با «$\not\subseteq$» نمایش می‌دهیم.

**مثال:**

$$\{۳,۷\}\subseteq\{۱,۳,۵,۷\}\qquad \{-۲,۰,۵\}\not\subset\{-۲,۰,۲,۴,۶\}$$

**نکته**

۱- مجموعه‌ی تهی، زیر مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها می‌باشد. $\varnothing\subseteq M\qquad \varnothing\subseteq F\qquad \{\}\subseteq\{۲,۹,۱۱\}$

۲- هر مجموعه، زیر مجموعه‌ی خودش می‌باشد. $P\subseteq P\qquad N\subseteq N\qquad A\subseteq A$

۳- مجموعه‌ی تهی فقط یک زیر مجموعه دارد که آن هم خودش است.

۴- اگر از بین زیر مجموعه‌های یک مجموعه، خود مجموعه را کنار بگذاریم، سایر زیر مجموعه‌ها، زیر مجموعه‌های محض آن نامیده می‌شوند. زیر مجموعه‌ی محض را با علامت «$\subset$ » نمایش می‌دهیم.

**مثال:** اگر $A=\{۵,۶,۷\}$ باشد، زیر مجموعه‌های **محض** آن به صورت زیر خواهند بود. $\{\},\{۵\},\{۶\},\{۷\},\{۵,۶\},\{۵,۷\},\{۶,۷\}$

**نکته** تعداد زیر مجموعه‌های هر مجموعه‌ی $n$ عضوی از رابطه‌ی $۲^n$ به دست می‌آید.

**مجموعه‌های اعداد:** مجموعه‌های اصلی اعداد در ریاضی که تاکنون با آن آشنا شده‌اید به شرح زیر می‌باشند.

مجموعه‌ی عددهای طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$

مجموعه‌ی عددهای حسابی $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,...\}$

مجموعه‌ی عددهای صحیح $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

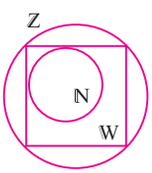
مجموعه‌های زیر، زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌های اصلی می‌باشند.

مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج $E=\{۲,۴,۶,...\}$

مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد $O=\{۱,۳,۵,...\}$

مجموعه‌ی عددهای اول $P=\{۲,۳,۵,...\}$

با توجه به شکل مقابل رابطه‌های زیر برقرار می‌باشند.




همچنین : $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W},\quad \mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z},\quad \mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}$

$E\subseteq\mathbb{N},\quad O\subseteq\mathbb{N},\quad P\subseteq\mathbb{N}$

**نمایش مجموعه با علائم ریاضی (زبان ریاضی):**

۱) عضوهای مجموعه را با حرف کوچک انگلیسی مانند $x, n, k, \ldots$ نمایش می‌دهیم.

۲) علامت «|» را «به طوری‌که» یا «به قسمی‌که» یا «به شرطی‌که» می‌خوانیم.

۳) برای تعیین محدوده‌ی عضوها از علامت‌های « $<, >, \leq$ یا $\geq$ » استفاده می‌کنیم.

**مثال:**

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid ۵ \leq x < ۹\} = \{۵, ۶, ۷, ۸\}$ (اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۹ و بزرگ‌تر یا مساوی ۵)

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۳ < x < ۳\} = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ (اعداد صحیح کم‌تر از ۳ و بیش‌تر از ۳ـ)

**نکته** گاهی اعضای یک مجموعه به جای یک حرف با یک عبارت جبری یک یا چند جمله‌ای معرفی می‌شوند.

$C = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{۲ \times ۱, ۲ \times ۲, ۲ \times ۳, \ldots\} = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}$

$D = \{۳n + ۲ \mid n \in \mathbb{W}\} = \{۳ \times ۰ + ۲, ۳ \times ۱ + ۲, ۳ \times ۲ + ۲, \ldots\} = \{۲, ۵, ۸, \ldots\}$

$E = \{۲^m \mid m \in \mathbb{N}, m \leq ۳\} = \{۲^۱, ۲^۲, ۲^۳\} = \{۲, ۴, ۸\}$

$F = \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, ۲ \times (-۱) - ۱, ۲ \times ۰ - ۱, ۲ \times ۱ - ۱, \ldots\} = \{\ldots, -۳, -۱, ۱, \ldots\}$

**نکته** چون مجموعه‌ی عددهای گویا بی‌شمار عضو داشته و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست، بنابراین مجموعه‌ی عددهای گویا را به شکل زیر نمایش می‌دهیم.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\right\}$$

یعنی هر عددی که بتوان آن را به صورت کسر نوشت به‌طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده، در ضمن مخرج آن صفر نباشد عددی گویاست. زیرا کسرهایی که مخرج صفر دارند تعریف نشده هستند.

**نکته** همه‌ی عددهای طبیعی، حسابی، صحیح، اعشاری، مخلوط، کسری و رادیکالی‌هایی که عدد زیر آن مجذور کامل باشد عضو مجموعه‌ی اعداد گویا می‌باشند.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

## مثال های آموزشی

**۱ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابرند؟**

الف) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < ۵\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۱ \leq x \leq ۴\}$

ب) $C = \{۲x \mid x \in \mathbb{N}\}, D = \{۲k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

پ) $E = \left\{\frac{k}{۲} \mid k = ۲, ۴, ۶\right\}, F = \{k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}, ۱ < k < ۵\}$

**پاسخ :**

الف) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}, B = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \Rightarrow A = B$

ب) $C = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}, D = \{\ldots, -۲, ۰, ۲, \ldots\} \Rightarrow C \neq D$

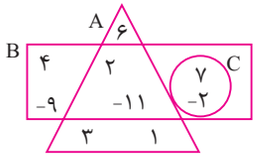
پ) $E = \{۱, ۲, ۳\}, F = \{۱, ۲, ۳\} \Rightarrow E = F$

**۲ همه‌ی زیر مجموعه‌های $A = \{x^۲ \mid x \in \mathbb{W}, ۰ \leq x < ۳\}$ را بنویسید.**

**پاسخ :** $A = \{۰, ۱, ۴\}$ در نتیجه $A$ دارای $۲^۳ = ۸$ زیر مجموعه می‌باشد.

زیر مجموعه‌های $A$ عبارتند از: $\varnothing, \{۰\}, \{۱\}, \{۴\}, \{۰, ۱\}, \{۰, ۴\}, \{۱, ۴\}, \{۰, ۱, ۴\}$

**۳** با توجه به شکل مقابل زیر مجموعه‌های خواسته شده را بنویسید.




الف) زیر مجموعه‌ای از $A$ که عضوهای آن زوج باشند.

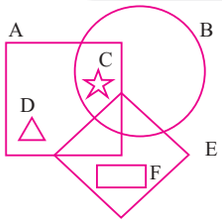
ب) زیر مجموعه‌ای از $B$ که عضوهای آن شمارنده‌ی ۶ باشند.

پ) زیر مجموعه‌ای از $C$ که عضوهای آن عدد اول باشند.

پاسخ :

الف) $\{۲,۶\}$ ب) $\{۲\}$ پ) $\{۷\}$

**۴** با توجه به شکل مقابل در جاهای خالی علامت مناسب $(\subseteq, \not\subseteq)$ قرار دهید.




الف) $C \square F$ ب) $D \square F$ پ) $E \square D$

ت) $D \square A$ ث) $E \square B$ ج) $F \square E$

پاسخ :

الف) $\not\subseteq$ ب) $\not\subseteq$ پ) $\not\subseteq$ ت) $\subseteq$ ث) $\not\subseteq$ ج) $\subseteq$

**۵** مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان نمایش دهید.

$$M=\left\{\frac{x+۱}{۲} \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ \le x \le ۰\right\} \qquad N=\left\{\frac{x^۲}{x-۲} \mid x \in \mathbb{N}, x<۵\right\}$$

$$p=\left\{\frac{۲k}{۲k-۱} \mid k \in \mathbb{W}\right\} \qquad K=\left\{n^۲-۳n+۱ \mid n \in \mathbb{N}, ۷<n<۱۰\right\}$$

پاسخ :

$$M=\left\{\frac{-۳+۱}{۲}, \frac{-۲+۱}{۲}, \frac{-۱+۱}{۲}, \frac{۰+۱}{۲}\right\}=\left\{-۱, \frac{-۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}\right\}$$

$$N=\left\{\frac{۱^۲}{۱-۲}, \frac{۲^۲}{۲-۲}, \frac{۳^۲}{۳-۲}, \frac{۴^۲}{۴-۲}\right\}=\left\{\frac{۱}{-۱}, \frac{۴}{۰}, \frac{۹}{۱}, \frac{۱۶}{۲}\right\}=\{-۱,۹,۸\}$$ ($\frac{۴}{۰}$ تعریف نشده است)

$$P=\left\{\frac{۲\times۰}{۲\times۰-۱}, \frac{۲\times۱}{۲\times۱-۱}, \frac{۲\times۲}{۲\times۲-۱}, \ldots\right\}=\left\{\frac{۰}{-۱}, \frac{۲}{۱}, \frac{۴}{۳}, \ldots\right\}=\left\{۰,۲, \frac{۴}{۳}, \ldots\right\}$$

$$K=\left\{۸^۲-۳\times۸+۱, ۹^۲-۳\times۹+۱\right\}=\{۶۴-۲۴+۱, ۸۱-۲۷+۱\}=\{۴۱,۵۵\}$$

## تمرین

**۱** جاهای خالی را با عددهای مناسب پر کنید.

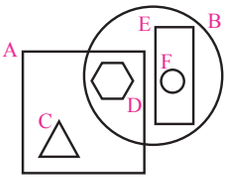
الف) $\left\{-۳, \frac{۱۲}{۴}, \sqrt{۲۵}, \ldots\right\}=\left\{\sqrt{۹}, \ldots, \frac{۱۰}{۲}, ۷\right\}$

ب) $\left\{۰/۲۵, -۱\frac{۱}{۵}, \ldots, (-۲)^۲\right\}=\left\{۴, \ldots, -\frac{۶}{۵}, \frac{۳}{۴}\right\}$

پ) $\left\{\sqrt{\frac{۴}{۴۹}}, \ldots, ۳^۳, -۱/۲۵\right\}=\left\{\ldots, -\frac{۵}{۴}, \frac{۴}{۱۴}, -\sqrt{۱۶}\right\}$

**۲** همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A=\{x \in \mathbb{N} \mid x \le ۳\}$ را بنویسید.

**۳** با توجّه به شکل مقابل در جاهای خالی علامت مناسب $(\subseteq, \not\subseteq)$ قرار دهید.




D ☐ E　　C ☐ F

C ☐ A　　D, F ☐ B

F ☐ B　　A ☐ B

**۴** مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان بنویسید.

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -۷ \le x < ۳\}$

$B = \{x^۲ - ۳ \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ < x < ۴\}$

$C = \left\{\frac{۲x+۵}{۳-x} \mid x \in W, x \le ۳\right\}$

**۵** مجموعه‌های زیر با نماد ریاضی نمایش دهید.

$D = \{-۷, -۶, -۵, \ldots\}$

$E = \{۱۱, ۱۰, ۹, \ldots, -۴\}$

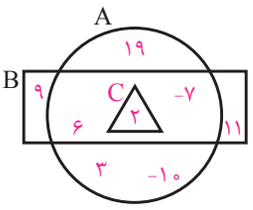
$F = \{۳۷, ۳۸, ۳۹, \ldots\}$

**۶** درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را مشخّص کنید. ( O اعداد فرد، E اعداد زوج و P اعداد اوّل)

$\mathbb{N} \subset W$ ☐　　$W \subseteq \mathbb{Z}$ ☐　　$P \subseteq \mathbb{N}$ ☐

$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ ☐　　$O \subseteq W$ ☐　　$E \not\subseteq \mathbb{Z}$ ☐

**۷** با توجّه به شکل مقابل مجموعه‌های خواسته شده را بنویسید.




الف) زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن عدد اوّل باشند.

ب) زیرمجموعه‌ای از B بنویسید که اعضای آن شمارنده‌ی ۱۸ باشند.

پ) زیرمجموعه‌ای از C بنویسید که اعضای آن عدد طبیعی نباشند.

**۸** مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۴ < x < ۳\}$ را با عضوهایش بنویسید. سپس زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که عضوهای آن:

الف) کوچک‌تر از ۱- باشند.　　ب) عدد اوّل باشند.

پ) شمارنده‌ی ۶ باشند.　　ت) مضرب طبیعی ۷ باشند.

**۹** با توجّه به تساوی‌های زیر مقدار مجهول‌ها را به‌دست آورید.

الف) $\{a, -۳, ۲\} = \left\{\sqrt{۴}, b, \frac{۳}{۴}\right\}$

ب) $\{x+۳, y-۲\} = \{۹\}$

پ) $\left\{۳, -۲m+۱, \sqrt{۹}\right\} = \{۷, ۲-۵n\}$

**۱۰** مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

$A = \{-۱۰, -۵, ۰, ۵, ۱۰, ۱۵\}$

$B = \{۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۹, ۲۲\}$

$C = \{۱۱, ۱۳, ۱۵, \ldots\}$